UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
IMECC

O Teorema de Kato para Equações de Evolução Quase Lineares e Aplicações

Juan Ernesto Montealegre Scott

Profa. Dra. Márcia A. G. Scialom
Orientadora

IMECC-UNICAMP

Junho de 1994

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Juan Ernesto Montealegre Scott, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de Junho de 1994.

Márcia Scialom

Prof. Dra. Márcia A. G. Scialom

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

À Julia e Elizabeth

Introdução

Esta monografia trata principalmente o problema abstrato de Cauchy associado à equação de evolução quase linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t,u)u(t) + f(t,u) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T \\ \\ u(0) = u_0 \in Y, \end{cases} \tag{Q}$$

onde X e Y são espaços de Banach, u representa uma função a encontrar com valores em X, $A(t,y)$ é um operador linear em X que depende de $t \in [0,T]$ e $y \in W$ (um subconjunto de X) e $f : [0,T] \times X \to X$ é uma função dada. Assumimos que $\{A(t,y)\}_{(t,y) \in [0,T] \times W}$ é uma família de geradores de semigrupos de classe C_0 que não são necessariamente analíticos, é por este motivo que seguindo a T. Kato, chamamos o problema (Q) de tipo "hiperbólico".

O objetivo da monografia é estudar e aplicar dois teoremas devidos a Kato [K4], que com algumas hipóteses mecanicamente verificáveis, garantem que o problema (Q) é localmente bem posto. Lembramos que o problema (Q) é dito localmente bem posto se existem soluções locais (i.e. existe $T_0 \in [0,T]$ e $u \in C([0,T],Y)$ tal que (Q) é satisfeito), são únicas as soluções em alguma vizinhança da origem, e a solução depende continuamente do valor inicial u_0.

No Capítulo 1 enunciamos, sem demonstração, os resultados necessários para a melhor compreensão dos Teoremas de Kato. As referências principais para este capítulo são [BB], [Hi], [M] e [P].

Como os Teoremas de Kato para o problema (Q) apresentados no Capítulo 3, baseiam sua demonstração na teoria para o problema de evolução linear, consideramos conveniente descrever no Capítulo 2 os resultados necessários para nossos fins.

Finalmente, no Capítulo 4 aplicamos os Teoremas de Kato, para provar que o problema associado à equação de Korteweg-de Vries generalizada é localmente bem posto, quando o dado inicial pertence ao espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, onde $s \geq 3$.

Neste trabalho a notação empregada é a usual em equações diferenciais parciais. A referência a um teorema com três números significa que o primeiro dígito refere-se ao capítulo e os outros dois a numeração corrente do teorema dentro do capítulo considerado. A mesma observação vale para proposições, definições e comentários.

Gostaria de agradecer à Profa. Dra. Márcia A. G. Scialom pela constante orientação durante a elaboração deste trabalho.

Índice

Introdução i

Capítulo 1. Preliminares 1

1.1. Cálculo em Espaços de Banach 1
1.2. Semigrupos de Classe C_0. Geração e Representação 5
1.3. Subespaços Invariantes e Admissíveis 13
1.4. Famílias Estáveis de Geradores 14

Capítulo 2. Equações de Evolução Lineares do Tipo Hiperbólico 17

2.1. A Equação Homogênea. Sistemas de Evolução 18
2.2. A Equação Não Homogênea. Soluções Amenas (Mild) 35
2.3. Teoremas de Pertubação e Convergência 39

Capítulo 3. Equações de Evolução Quase Lineares do Tipo Hiperbólico 47

3.1. Teorema de Existência e Unicidade 47
3.2. Dependência Contínua 56
3.3. Comentários 62

Capítulo 4. Aplicação à Equação Generalizada de Korteweg-de Vries 63

4.1. Equação Generalizada de Korteweg-de Vries em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$ 64
4.2. Comentários 76

Bibliografia 78

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apenas recopilar notações, definições e resultados utilizados nos capítulos posteriores. No que se segue, não apresentaremos as demonstrações dos resultados que podem ser encontradas nas referências dadas no texto.

1.1 Cálculo em Espaços de Banach.

Nesta seção X e Y rerpresentam dois espaços de Banach e X' o dual topológico de X. Daremos algumas definições e propriedades das funções definidas num conjunto dos números reais com valores em X ou em $\mathcal{L}(X,Y)$.

Seja u uma aplicação definida no conjunto $I \subseteq I\!R$ com valores em X. Como em X temos duas topologias, forte e fraca, daremos para cada uma delas uma noção de continuidade.

Definição 1.1. Dizemos que u é *fracamente contínua* em $s_0 \in I$ se

$$\lim_{s \to s_0} |u'[u(s)] - u'[u(s_0)]| = 0 \qquad \forall\ u' \in X'$$

e é dita fortemente contínua em s_0 se

$$\lim_{s \to s_0} ||u(s)] - u(s_0)||_X = 0.$$

Se I é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e $u : I \longrightarrow X$ é fracamente contínua no intervalo I, é claro que $u' o u$ é contínua e portanto limitada em I para cada $u' \in X'$. Segue do teorema da limitação uniforme que $||u(t)||_X$ é limitada em I. Além disso, $u(I)$ está contido no subespaço fechado e separável gerado por $\{u(t) : t \in \mathbb{Q} \cap I\}$.

Seja T uma aplicação do conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ com valores em $\mathcal{L}(X, Y)$, vamos ter três definições de continuidade, pois em $\mathcal{L}(X, Y)$ temos três topologias: a uniforme, a forte e a fraca.

Definição 1.2. Dizemos que T é *fracamente contínua* em $s_0 \in I$ se

$$\lim_{s \to s_0} |u'[T(s)u] - u'[T(s_0)u]| = 0 \quad \forall\, u \in X, \quad \forall\, u' \in X'$$

e T é *fortemente contínua se*

$$\lim_{s \to s_0} ||T(s)u - T(s_0)u||_X = 0 \qquad \forall\, u \in X.$$

Além disso, T chama-se *uniformemente contínua* em $s_0 \in I$ se

$$\lim_{s \to s_0} ||T(s) - T(s_0)||_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0.$$

Da mesma forma que com a aplicação u, se $T : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ é fracamente contínua no intervalo fechado I, temos que $||T(s)||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ é limitado, mas $T(I)$ não está necessariamente contido num subespaço separável de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Vejamos agora as distintas noções de diferenciabilidade. Sejam u e T como antes.

Definição 1.3. A aplicação u chama-se *fracamente* (*fortemente*) *diferenciável* em $t_0 \in I$ se existe $\tilde{u}(t_0) \in X$ tal que $t^{-1}[u(t_0 + t) - u(t_0)]$ tende fracamente (fortemente) para $\tilde{u}(t_0)$ quando $t \longrightarrow 0$, neste caso escrevemos $\partial_t u(t_0)$ por $\tilde{u}(t_0)$.

Da mesma forma temos três noções de diferenciabilidade para a aplicação T.

Definição 1.4. A aplicação T é dita *fracamente* (*fortemente ou uniformemente*) *diferenciável* em $t_0 \in I$ se existe $\tilde{T}(t_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $t^{-1}[T(t_0 + t) - T(t_0)]$ tende fracamente (fortemente ou uniformemente) para $\tilde{T}(t_0)$ quando $t \to 0$, escrevemos $\partial_t T(t_0)$ por $\tilde{T}(t_0)$.

Um resultado que foi encontrado em [Kr,4] e será utilizado no capítulo 2 é o seguinte: se $u : [0,T] \to X$ é contínua e a derivada pela direita $\partial_t^+ u$ de u é contínua em $[0,T]$, então u é continuamente diferenciável no intervalo $[0,T]$ e $\partial_t u = \partial_t^+ u$.

Seja $(I, \mathcal{B}, m)$ um espaço mensurável, onde m é uma medida completa e $m(I) < \infty$. Vejamos a noção de mensurabilidade para as aplicações $u : I \to X$ e $T : I \to \mathcal{L}(X,Y)$ em relação à medida m.

Definição 1.5. A aplicação u é dita de *imagem separável* se $u(I)$ é separável, e de *imagem quase separável* se existe um conjunto $J \subseteq I$ de medida nula tal que $u(I - J)$ é separável.

Definição 1.6. A aplicação u chama-se *simples* se existem constantes não nulas c_i e conjuntos mensuráveis disjuntos E_i tais que para cada $i = 1, \ldots, n$ temos $m(E_i) < \infty$ e

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i}(x)$$

onde $\mathcal{X}_E$ é a função característica de E.

Neste caso a função u tem um número finito de valores e a medida do conjunto $\{t \in I : ||u(t)||_X > 0\}$ é finita.

Definição 1.7. A função $u : I \to X$ é *fortemente mensurável* se existe uma seqüência $\{u_n\}_{n \in N}$ de funções simples tal que

$$||u_n(x) - u(x)||_X \to 0$$

para quase todo $x \in I$ quando $n \to \infty$. Dizemos que u é *fracamente mensurável* em I se $u' \circ u$ é mensurável para todo $u' \in X$.

É claro que o conjunto das funções fortemente mensuráveis é um espaço vetorial, e que toda função contínua é fortemente mensurável. Se u é uma função mensurável a valores reais e v é fortemente mensurável então uv é fortemente mensurável. Além disso, o limite forte de seqüências $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ de funções fortemente mensuráveis é fortemente mensurável.

As duas noções de mensurabilidade estão relacionadas pelo *teorema de Pettis* o qual garante que uma aplicação é fortemente mensurável se e somente se é fracamente mensurável e de imagem quase separável. Em conseqüência, se X é separável então a mensurabilidade forte e fraca são conceitos equivalentes.

Mais ainda, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e u é fracamente contínua, então u é fortemente mensurável. De fato, é claro que u é fracamente mensurável, e sabemos que $u(I)$ está contido no subespaço separável gerado por $\{u(t) : t \in \mathbb{Q} \cap I\}$, logo u é também de imagem separável e portanto fortemente mensurável.

Definição 1.8. Dizemos que T *é fortemente mensurável* se $T(\cdot)x$ é fortemente mensurável para todo $x \in X$, no sentido da definição 1.7, em relação à topologia de Y.

Suponhamos que X, Y e Z são três espaços de Banach, então temos a seguinte proposição devida a Kato [K3,665].

Proposição 1.9. Se $S : [0,T] \to \mathcal{L}(X,Y)$ e $T : [0,T] \to \mathcal{L}(Y,Z)$ são fortemente mensuráveis, então $TS : [0,T] \to \mathcal{L}(X,Z)$ é fortemente mensurável.

Definição 1.10. A *integral de Bochner* da função simples u é definida por

$$\int_E u dm = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i)$$

para todo $E \in \mathcal{B}$.

Definição 1.11. A integral de Bochner de uma função fortemente mensurável u é o limite forte (se existe) das integrais de Bochner de uma seqüência aproximada $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ de funções simples, isto é

$$\int_E u dm = \lim_{n\to\infty} \int_E u_n dm$$

onde $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(t) - u(t)||_X = 0$$

para quase todo $t \in I$.

Notemos que se $X = I\!R^n$ então a integral de Bochner é a integral de Lebesgue. Pode ser mostrado que a definição da integral de Bochner independe da seqüência $\{u_n\}_{n \in I\!N}$, e que se u é fortemente mensurável então u é Bochner integrável se e somente se $||u(\cdot)||_X$ é integrável.

Para a integral de Bochner temos as seguintes propriedades. A prova pode ser encontrada em [Hi].

Proposição 1.12. Se u é Bochner integrável então

$$|| \int_E u dm || \leq \int_E ||u|| dm.$$

Proposição 1.13. *Teorema da Convergência Dominada.* Se $\{u_n\}_{n \in I\!N}$ é uma seqüência de funções Bochner integráveis que converge fortemente em quase toda parte para a função u, e existe a função f a valores reais integrável segundo Lebesgue tal que $||u_n(t)|| \leq |f(t)|$ para quase todo t e todo $n \in I\!N$, então u é Bochner integrável e

$$\int_E u dm = \lim_{n \to \infty} \int_E u_n dm.$$

1.2 Semigrupos de Classe C_0. Geração e Representação.

Nesta seção X representa um espaço de Banach e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ uma família a um parâmetro em $\mathcal{L}(X)$, a álgebra de Banach dos operadores lineares limitados em X. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas em [P].

Definição 2.1. A família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um *semigrupo de operadores lineares* em X se

1. $T(0) = I$, e
2. $T(r + s) = T(r)T(s)$ para todo $r,\ s \in I\!R_0^+$.

Na próxima definição consideramos a topologia forte em $\mathcal{L}(X)$.

Definição 2.2. Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares é um *semigrupo de classe C_0 em X* se para todo $x \in X$

$$\lim_{t\to 0^+} ||T(t)x - x||_X = 0$$

ou equivalentemente $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$.

Os semigrupos de classe C_0 são ditos também C_0-semigrupos.

Proposição 2.3. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. Então existem $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \tag{2.1}$$

para todo $t \geq 0$.

Para os números reais $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$, denotamos o conjunto dos semigrupos de classe C_0 que satisfazem (2.1) por $C_0(M,\omega)$. Os elementos de $C_0(M,0)$ chama-se *semigrupos uniformemente limitados* e se pertencem a $C_0(1,0)$ são ditos *semigrupos e contração.*

Os seguintes corolários são conseqüências imediatas da proposição anterior.

Corolário 2.4. Todo semigrupo de classe C_0 é uniformemente limitado em subintervalos finitos de $\mathbb{R}_0^+$.

Corolário 2.5. Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então para todo $x \in X$ a função $T(\cdot)x$ é contínua.

O corolário 2.5 afirma que os semigrupos de classe C_0 têm a propriedade de continuidade forte, e assim são ditos também semigrupos fortemente contínuos.

Se A é um operador limitado em X, não é difícil provar que a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ converge em $\mathcal{L}(X)$ para um operador que denotamos por e^{tA} e que a família $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo, os detalhes podem ser encontrados em [M].

Definição 2.6. O *gerador (infinitesimal)* do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 em X é a aplicação $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ definida por

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

onde $\mathcal{D}(A) = \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$.

Segue-se imediatamente da definição que $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear não limitado. Vejamos a seguir algumas propriedades dos geradores.

Proposição 2.7. Seja A o gerador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Se $x \in \mathcal{D}(A)$ temos que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{2.2}$$

Mais ainda,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds = \int_0^t AT(s)xds$$

onde $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$.

A seguinte proposição diz que o gerador de um C_0-semigrupo tem duas propriedades desejáveis nos operadores ilimitados.

Proposição 2.8. Se A é o gerador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $\mathcal{D}(A)$ é um conjunto denso em X e A é um operador linear fechado.

Lembremos que um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ é fechado se o seu gráfico é fechado em $X \times Y$, isto é, para toda seqüência $\{x_n\}_{n\in N}$ em $\mathcal{D}(A)$ convergente em X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$ existe em Y, verifica-se que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{D}(A)$ e $A(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A(x_n)$.

A seguinte propriedade dá a unicidade do gerador de um semigrupo de classe C_0.

Proposição 2.9. Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupos de classe C_0 em X, com o mesmo gerador A. Então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Suponhamos agora que $A \in \mathcal{L}(X)$ com norma $||A||$ e consideremos o C_0-semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$, então $\frac{1}{t}[e^{tA} - I]$ converge para A pois

$$||\frac{1}{t}[e^{tA} - I] - A||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{t}[e^{t||A||} - I] - ||A|| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to 0^+.$$

Assim a condição da definição 2.6, que é mais fraca, é satisfeita, daí que A é o gerador do semigrupo.

Pode-se mostrar agora que se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 com gerador A, então $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$. De fato, como vimos depois do corolário 2.5, $\{S(t) = e^{tA}\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo com gerador A, e da suposição junto com a proposição 2.9, temos $T(t) = S(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$.

Consideremos agora o *problema abstrato de Cauchy* (ou *problema de valor inicial*). Seja X um espaço de Banach e

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) + f(t), & \text{para} \quad t > s \\ u(s) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $u : [0, \infty) \to X$ é a função a encontrar, o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$, a função $f : (s, \infty) \to X$, e $u_0 \in X$ são dados.

Nosso primeiro passo no estudo do problema (2.3) é determinar o que entenderemos por uma solução.

Definição 2.10. A função $u \in C([s,\infty), X) \cap C^1((s,\infty), X)$ é uma *solução* (*clássica*) de (2.3) se

1. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > s$, e
2. (2.3) é satisfeita.

Consideremos inicialmente o problema homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t) & \text{para} \quad t > s \\ u(s) = u_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Fazendo uma analogia com o caso escalar, (2.4) tem a solução formal $u(t) = e^{(t-s)A}u_0$, mas para isto algumas restrições no operador A e no dado inicial u_0 têm que ser feitas. Por exemplo, da discussão que segue à proposição 2.9, A tem que gerar um semigrupo para que $e^{(t-s)A}$ faça sentido. Além disso, a definição 2.10 conduz a uma restrição. De fato, como $u(s) = \lim_{t\to s^+} u(t) \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, se $u_0 \notin \overline{\mathcal{D}(A)} \neq X$ não é possível que u seja uma solução no sentido da definição 2.10. Mesmo no caso $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ temos dificuldades pois precisa-se que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Portanto assume-se que A gera um semigrupo de classe C_0 e $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, com o que obtemos.

Teorema 2.11. Seja A o gerador do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 e $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Então o problema abstrato de Cauchy (2.4) tem uma única solução. Neste caso a solução é dada por

$$u(t) = T(t-s)u_0.$$

As condições impostas sob A e u_0 são suficientes para garantir a existência e unicidade, embora não sejam necessárias. Para uma discussão mais detalhada ver [P, 100–103].

Estudando formalmente o problema (2.3) a procura de uma solução, encontramos um candidato

$$u(t) = T(t-s)u_0 + \int_s^t T(t-r)f(r)dr$$

onde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é como no teorema 2.11. Mas, como no caso homogêneo, temos que impor algumas condições ao dado inicial u_0 e à função f, assim temos,

Teorema 2.12. Sejam A o gerador do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0. Se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $f : [s,\infty) \to X$ é continuamente diferenciável, então (2.3) tem uma única solução u e

$$u(t) = T(t-s)u_0 + \int_s^t T(t-r)f(r)dr.$$

Nos teoremas 2.11 e 2.12 percebe-se a importância de poder determinar quando um operador linear gera um semigrupo. Vamos ver que existem condições necessárias e suficientes para isto.

Definição 2.13. Sejam X um espaço de Banach complexo e $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ um operador linear. O *conjunto resolvente de* T, denotado $\rho(A)$, é o conjunto dos números $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que

$$(\lambda I - A)^{-1} : \mathcal{D}(\lambda I - A)^{-1} \subseteq X \to \mathcal{D}(A) \subseteq X$$

existe, é limitado e $\mathcal{D}(\lambda I - A)^{-1}$ é denso em X.

O complementar de $\rho(A)$ é chamado *espectro de* A e representado por $\sigma(A)$.

Definição 2.14. Para $\lambda \in \rho(A)$ escrevemos

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

e chama-se de *resolvente de* A em λ.

Se A é um operador fechado e $\lambda \in \rho(A)$, o resolvente $R(\lambda : A)$ é um operador fechado e limitado com domínio denso em X. Segue-se que

$$\mathcal{D}(R(\lambda : A)) = \mathcal{R}(\lambda I - A) = X$$

assim $R(\lambda : A) : X \to \mathcal{D}(A)$ é bijetor, isto é

$$\begin{cases} (\lambda I - A)R(\lambda : A)x = x & \forall\, x \in X \\ R(\lambda : A)(\lambda I - A)x = x & \forall\, x \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

O seguinte teorema fornece uma caracterização para o resolvente do gerador de um semigrupo de classe C_0 em termos do semigrupo.

Teorema 2.15. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $C_0(M,\omega)$ em X com gerador A. Se $Re(\lambda) > \omega$ então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

para todo $x \in X$.

Assim, o resolvente de A é a transformada de Laplace de $T(t)$. Em particular, para o C_0-semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ temos que $R(\lambda : A)$ existe se e só se $|\lambda| > ||A||_{\mathcal{L}(X)}$. Em conseqüência,

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-(\lambda I - A)t} x\,dt$$

para todo $Re(\lambda) > ||A||_{\mathcal{L}(X)}$.

O seguinte teorema caracteriza os geradores dos C_0-semigrupos. Ele é conhecido como o *teorema de Hille, Yosida e Phillips.*

Teorema 2.16. Seja X um espaço de Banach. Uma condição necessária e suficiente para que um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ densamente definido e fechado gere um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 em X, é que existam números reais $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$ e

$$||R(\lambda : A)^n||_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}$$

para todo $\lambda > \omega$ e $n \in I\!N^+$. Nesse caso

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$$

para todo $t \geq 0$.

Quando $M = 1$ e $\omega = 0$ temos condições necessárias e suficientes para que um operador gere um semigrupo de classe C_0 de contrações. Este caso particular é o *Teorema de Hille-Yosida.*

O seguinte corolário é conseqüência imediata da prova do teorema 2.16. Ver [BB].

Corolário 2.17. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X com gerador A. Então para todo $x \in X$ e $t \geq 0$

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} \exp(tA_\lambda)x$$

onde $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I = \lambda R(\lambda : A) \in \mathcal{L}(X)$ chama-se *aproximação de Yosida* de A.

Um dos problemas fundamentais na teoria dos semigrupos de operadores é a relação entre o semigrupo e seu gerador. Dado um semigrupo obtém-se seu gerador pela definição 2.6. Uma maneira diferente de obter o gerador, ou melhor seu resolvente, é pelo teorema 2.15. Nas aplicações às equações diferenciais parciais é mais interessante obter o semigrupo a partir de seu gerador, e a razão para isto está, por exemplo, no teorema 2.11.

O corolário 2.17 afirma que um semigrupo de classe C_0 com gerador A é o limite da seqüência de semigrupos $\{\exp(tA_\lambda)\}_{t\geq 0}$ gerados pelas aproximações de Yosida A_λ de A. Assim, podemos utilizar a notação

$$T(t) = e^{tA} \tag{2.5}$$

para os C_0-semigrupos, onde deve ser entendido que se $A \in \mathcal{L}(X)$ a igualdade (2.5) acontece como foi visto no comentário após a proposição 2.9, mas no caso em que A seja um operador linear ilimitado deve-se entender (2.5) no seguinte sentido

$$e^{tA}X = \lim_{\lambda\to\infty} \exp(tA_\lambda)X \quad \text{para} \quad x \in X, \;\; t \geq 0.$$

Concluímos esta seção com generalizações das definições 2.2 e 2.6 também com o teorema 2.16.

Definição 2.18. Uma família a um parâmetro $\{T(t)\}_{t\in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(X)$ é um *grupo de classe* C_0 *em* X se

1. $T(0) = I$,
2. $T(r + s) = T(r)T(s)$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$, e
3. $\lim_{t\to 0} ||T(t)x - x||_X = 0$ para todo $x \in X$.

O gerador de um grupo de classe C_0 define-se da mesma forma que para os C_0-semigrupos, substituindo $t \to 0^+$ por $t \to 0$. A família $\{e^{tA}\}_{t\in \mathbb{R}}$ onde $A \in \mathcal{L}(X)$, é um exemplo de um C_0-grupo com gerador A.

Se $\{T(t)\}_{t\in \mathbb{R}}$ é um grupo de classe C_0 em X com gerador A é claro que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e seu gerador é A, além disso $\{T(-t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo com gerador $-A$. Reciprocamente se A e $-A$ geram os C_0-semigrupos $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então A gera o C_0-grupo $\{T(t)\}_{t\in \mathbb{R}}$ dado por

$$T(t) = \begin{cases} R(t) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ S(-t) & \text{se} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

O seguinte teorema dá condições necessárias e suficientes para que um operador linear gere um grupo de classe C_0.

Teorema 2.19. Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ gera um grupo $\{T(t)\}_{t\in \mathbb{R}}$ de classe C_0 que satisfaz $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se e só se

1. A é fechado e densamente definido, e
2. todo λ tal que $|\lambda| > \omega$ está no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A e para tal λ

$$||R(\lambda : A)^n||_{\mathcal{L}(X)} \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Subespaços Invariantes e Admissíveis.

Os resultados desta seção constituem os preliminares para o Capítulo 2. Segue-se de perto [P] e [K2].

Lembremos que se X é um espaço vetorial e Y um subespaço de X, Y é um *subespaço invariante* do operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ se $A[\mathcal{D}(A) \cap Y] \subseteq Y$. Para os semigrupos de classe C_0 temos

Definição 3.1. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é um *subespaço invariante do semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 em X se $T(t)Y \subseteq Y$ para todo $t \geq 0$.

No que segue consideramos subespaços Y que não são fechados em X.

Definição 3.2. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ um operador linear e seja Y um subespaço de X. A *parte de A em Y* é o operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \subseteq Y \to Y$ onde

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{x \in \mathcal{D}(A) \cap Y : Ax \in Y\}$$

e

$$\tilde{A}x = Ax \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

É claro que $\tilde{A} \subset A|_Y$, mas em geral $\tilde{A} \neq A|_Y$ pois se $Y \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$ então $\tilde{A} = 0$. No entanto, se Y é um subespaço invariante de A, como $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \cap Y$, então $\tilde{A} = A|_Y$.

Definição 3.3. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços de Banach. Dizemos que Y está continuamente contido em X se $Y \subseteq X$ e existe $C > 0$ tal que $\|y\|_X \leq C\|y\|_Y$ para todo $y \in Y$.

Na definição anterior a segunda condição estabelece que $\|\cdot\|_Y$ é mais forte que $\|\cdot\|_X$. No restante da seção, X e Y são dois espaços de Banach tais que Y está continuamente contido em X.

Definição 3.4. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X com gerador A. Dizemos que Y é *A-admissível* se

1. Y é um subespaço invariante de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, e
2. $\{T(t)|_Y\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 em Y.

Teorema 3.5. Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em X com gerador A, então Y é A-admissível se, e só se

1. existe $\omega \in I\!R$ tal que $R(\lambda : A)Y \subseteq Y$ para $\lambda > \omega$,
2. $\tilde{A}$ gera um C_0-semigrupo $\{\tilde{T}(t)\}_{t\geq 0}$ em Y.

Mais ainda, quando Y é A-admissível $\tilde{T}(t) = T(t)|_Y$ para todo $t \geq 0$.

1.4. Famílias Estáveis de Geradores.

Nesta seção continuamos apresentando alguns resultados a serem utilizados no próximo capítulo para a construção dos sistemas de evolução. Vamos supor que X e Y são dois espaços de Banach com Y continuamente contido em X, e T é um número positivo fixo.

Definição 4.1. Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de geradores de semigrupos de classe C_0 em X. Dizemos que $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma *família estável de geradores* se existem constantes $M \geq 0$ e $\omega \in I\!R$, chamadas constantes de estabilidade, tais que

$$||\prod_{i=1}^{k} R(\lambda : A(t_i))||_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-k}$$

para todo $\lambda > \omega$, toda $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ com $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T$ e $k \in I\!N^+$.

Na partição $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ um ponto qualquer t_i pode-se repetir. Aqui e no que se segue os produtos que contém $\{t_i\}_{i=1}^{k}$ serão *ordenados no tempo*, isto é, se $t_i \leq t_j$ o fator $R(\lambda : A(t_j))$ está a direita do fator $R(\lambda : A(t_i))$. Notemos também que a noção de estabilidade é independente da norma do espaço, embora as constantes de estabilidade dependam.

Suponhamos que para cada $t \in [0,T]$ o operador $A(t)$ gera um semigrupo de clase $C_0(1,\omega)$ em X, então a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável com constantes de estabilidade $(1,\omega)$. De fato, se $\{t_i\}_{i=1}^k$ com $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T$ e consideramos $\lambda > \omega$ então

$$||\prod_{i=1}^{k} R(\lambda : A(t_i))||_{\mathcal{L}(X)} \leq \prod_{i=1}^{k} ||R(\lambda : A(t_i))||_{\mathcal{L}(X)} \leq \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \omega)^{-1} = (\lambda - \omega)^{-k}.$$

Em particular, toda família de geradores de semigrupos de contração é estável com constantes de estabilidade $(1,0)$.

Se $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de geradores de C_0-semigrupos em X, no que segue do trabalho, representamos por $\{T_t(s)\}_{s\geq 0}$ o semigrupo de classe $C_0(M_t,\omega_t)$ gerado por $A(t)$, para cada $t \in [0,T]$.

Proposição 4.2. As seguintes afirmações são equivalentes

1. $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável com constantes (M,ω).
2. Para qualquer $\{t_i\}_{i=1}^k$ com $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T$ e $k \in I\!N^+$

$$||\prod_{i=1}^{k} T_{t_i}(s_i)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp(\omega \sum_{i=1}^{k} s_i)$$

   para todo $s_i \geq 0$.
3. Para toda $\{t_i\}_{i=1}^k$ com $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq T$ e $k \in I\!N^+$

$$||\prod_{i=1}^{k} R(\lambda_i : A(t_i))||_{\mathcal{L}(X)} \leq M \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \omega)^{-1}$$

   para qualquer $\lambda_i > \omega$.

Não é fácil determinar quando uma família de geradores é estável. O seguinte teorema de perturbação é um critério útil para este fim.

Teorema 4.3. Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família estável de geradores com constantes de estabilidade (M,ω) e seja $\{B(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de operadores lineares limitados em X. Se $||B(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq C$ para $t \in [0,T]$, então $\{A(t) + B(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável de geradores com constantes de estabilidade $(M, \omega + CM)$.

Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família estável de geradores em X. Nosso resultado seguinte é uma condição suficiente para que a família de partes de $A(t)$ em Y, seja estável em Y.

Teorema 4.4. Seja $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de isomorfismos de Y em X que satisfaz as condições seguintes:

1. Existe $C > 0$ tal que $||S(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq C$ e $S^{-1}(t)||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$.
2. A aplicação $t \in [0,T] \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(Y,X)$ é de variação limitada, na norma de $\mathcal{L}(Y,X)$.
3. A família $\{B(t)\}_{t\in[0,T]}$, onde $B(t) = S(t)A(t)S^{-1}(t)$, é uma família estável de geradores de semigrupos de classe C_0 em X.

Então Y é $A(t)$-admissível para cada $t \in [0,T]$, e $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável de geradores em Y.

A prova destes teoremas pode ser vista em [P].

Capítulo 2

Equações de Evolução Lineares do Tipo Hiperbólico

Seja X um espaço de Banach, e seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de geradores de semigrupos de classe C_0 em X, isto é, para $t \in [0,T]$ o operador $A(t) : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ satisfaz as condições do teorema 1.2.16. Consideremos o problema abstrato de Cauchy associado à equação de evolução linear do tipo hiperbólico

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t,u)u(t) + f(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq s < t \leq T \\ \\ u(s) = y \end{cases} \tag{L}$$

onde $T \geq 0$, $f : [s,T] \to X$ e $u \in Y$ são dados.

Iniciamos com a definição de solução para o problema (L).

Definição 0.1. A função $u \in C([s,T],X)$ é uma *solução clássica* de (L) se $u \in C^1((s,T],X)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A(t))$ para $s < t \leq T$ e (L) é satisfeita em X.

Desafortunadamente não se conhecem condições simples que garantam a existência de soluções clássicas para (L). É por isso que nós vamos usar uma noção mais restrita de solução. Para isto consideramos um espaço de Banach Y densa e continuamente contido em X. Desta forma

Definição 0.2. A função $u \in C([s,T],Y)$ é uma *solução a valores em* Y do problema (L) se $u \in C^1((s,T],X)$ e (L) é satisfeita em X.

As soluções a valores em Y são diferentes das soluções clássicas pois para $t \in [s, T]$ satisfazem a condição $u(t) \in Y \subseteq \mathcal{D}(A(t))$ e não somente $u(t) \in \mathcal{D}(A(t))$, além disso são contínuas na norma de Y que é mais forte que a norma de X. Notemos que da definição 0.2 o dado inicial y pertence ao espaço Y.

Nosso objetivo neste capítulo é garantir, sob condições apropriadas, que as soluções a valores em Y de (L) existem, são únicas e dependem continuamente do dado inicial. Este resultado será a base para nosso estudo das equações de evolução quase lineares do tipo hiperbólico, a ser feito no capítulo 3.

2.1. A Equação Homogênea. Sistemas de Evolução.

Nesta seção consideramos o problema de evolução linear homogêneo correspondente a (L), isto é

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t)u(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = y \in Y \end{cases} \tag{H}$$

No que segue denotamos por Δ o conjunto

$$\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\}$$

e lembremos que X e Y são dois espaços de Banach com Y densa e continuamente contido em X.

Definição 1.1. Uma família a dois parâmetros $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ de operadores lineares em X, chama-se um *sistema de evolução* em X se

1. $U(t,t) = I$ e $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$
2. A aplicação $(t,s) \in \Delta \mapsto U(t,s)$ é fortemente contínua na norma de X, isto é, para todo $x \in X$ temos que

$$||U(t,s)x - U(t_0,s_0)x||_X \to 0 \quad \text{quando} \quad (t,s) \to (t_0,s_0).$$

Neste caso cada operador $U(t,s)$ é dito um *operador de evolução.*

Suponhamos que é possível mostrar que existe um único sistema de evolução $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ associado com (H). Comparando com o caso escalar podemos esperar que $u(t) = U(t,s)y$ seja uma solução de (H), isto é

$$u(s) = U(s,s)y = Iy = y \tag{1.1}$$

e

$$\partial_t U(t,s)y = \partial_t u(t) = A(t)u(t) = A(t)U(t,s)y \tag{1.2}$$

e a aplicação $t \in [0,T] \mapsto U(t,s)y$ é contínua na norma de Y.

Como (1.1) se cumpre da definição 1.1, nosso objetivo é provar que existe um único sistema de evolução $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ em X tal que a aplicação $U(\cdot,s)y$ é contínua na norma de Y, e a igualdade (1.2) é satisfeita. É neste sentido que temos o seguinte teorema devido à Kato [K2].

Teorema 1.2. Sejam X e Y dois espaços de Banach com Y densa e continuamente contido em X, e para cada $0 \le t \le T$ seja $A(t)$ o gerador do semigrupo $\{T_t(s)\}_{s\ge 0}$ de classe C_0 em X. Suponhamos que

H_1: $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável em X com constantes (M,ω).

H_2: Y é $A(t)$-admissível para $t \in [0,T]$ e a família $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ de partes de $A(t)$ em Y, é uma família estável em Y com constantes de estabilidade $(\tilde{M},\tilde{\omega})$.

H_3: $Y \subseteq \mathcal{D}(A(t))$ para todo $t \in [0,T]$, $A(t) \in \mathcal{L}(Y,X)$ e $t \in [0,T] \mapsto A(t)$ é uma aplicação contínua na norma de $\mathcal{L}(Y,X)$.

Então existe um único sistema de evolução $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ em X e

E_1: $||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega(t-s)}$ para todo $(t,s) \in \Delta$.

E_2: $\partial_t^+ U(t,s)y|_{t=s} = A(s)y$ para todo $y \in Y$ e todo $s \in [0,T]$.

E_3: $\partial_s U(t,s)y = -U(t,s)A(s)y$ para todo $y \in Y$ e $(t,s) \in \Delta$.

No que segue ∂_t^+ denota a derivada à direita e ∂_s representa a derivada usual, ambas calculadas na norma de X. Antes de provar o teorema vejamos algumas proposições preliminares.

Inicialmente, vamos aproximar a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ por uma seqüência de famílias seccionalmente constantes $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ definida da seguinte forma: dado $n \geq 1$ escolhemos a partição

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{n-1}^n < t_n^n = T$$

do intervalo $[0,T]$, onde $t_k^n = \dfrac{k}{n}T$; então

$$\begin{cases} A_n(t) = A(t_{k-1}^n) & \text{se} \quad t_{k-1}^n < t < t_k^n, \quad k = 1,\ldots,n \\ A_n(T) = A(T) \end{cases}$$

Proposição 1.3. As famílias $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ com $n \in I\!N$ satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n(t) - A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0 \tag{1.3}$$

uniformemente em $[0,T]$. Além disso, para cada $n \in I\!N$ a família $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável em X com constantes (M,ω) e a família $\{\tilde{A}_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ das partes de $A_n(t)$ em Y, é estável em Y com constantes $(\tilde{M},\tilde{\omega})$.

Prova.
Se $t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]$ então $|t - t_{k-1}^n| = |t - \dfrac{k-1}{n}T| \leq \dfrac{T}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$. A aplicação $t \in [0,T] \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(Y,X)$ é contínua na norma $||\cdot||_{\mathcal{L}(Y,X)}$ por H_3, logo

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n(t) - A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} = \lim_{n\to\infty} ||A(t_{k-1}^n) - A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0$$

uniformemente em $[0,T]$.
Seja $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m \leq T$, então para $j = 1,\ldots,m$, existe $k_j = 1,\ldots,m$ tal que $t_j \in [t_{k_j-1}, t_{k_j}]$. Assim por H_1

$$\prod_{j=1}^{m}(\lambda I - A_n(t_j))^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} = ||\prod_{j=1}^{m}(\lambda I - A_n(t_{k_j-1}))^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda-\omega)^{-m}$$

para todo $\lambda > \omega$. A segunda parte segue-se pois Y é $A(t)$-admissível e a família $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável em Y com constantes $(\tilde{M},\tilde{\omega})$. ■

Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ definimos a família $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ de operadores lineares em X por

$$\begin{cases} U_n(t,s) = T_{t_{k-1}^n}(t-s) & \text{se} \quad t_{k-1}^n \le s \le t \le t_k^n, \quad k = 1,\dots,n \\ U_n(t,s) = U_n(t,r)U_n(r,s) & \text{se} \quad t_{k-1} \le s \le t_k \le r \le t_{\ell-1} \le t \le t_\ell, \quad k < \ell \end{cases} \tag{1.4}$$

onde para cada $t \in [0,T]$, $\{T_t(s)\}_{s\ge 0}$ é o semigrupo gerado por $A(t)$. Temos que $U_n(t,s)$ está bem definida em Δ.

Proposição 1.4. A família $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é um sistema de evolução em X tal que

$$||U_n(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega(t-s)}.$$

Além disso $U_n(t,s)Y \subseteq Y$ e

$$||U_n(t,s)y||_Y \le \tilde{M}e^{\tilde{\omega}(t-s)}$$

para todo $(t,s) \in \Delta$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

Prova.

Suponhamos que $(t,s) \in \Delta$ é fixo e tal que para algum $j = 1,\dots,n$ temos

$$t_j^n \le s \le t_{j+1}^n \le \dots \le t_{j+m}^n \le t \le t_{j+m+1}^n,$$

então

$$U_n(t,s) = U_n(t,t_{j+m-1}^n)U_n(t_{j+m-1}^n,\ t_{j+1})U_n(t_{j+1}^n,s)$$

logo

$$U_n(t,s) = T_{t_{j+m}^n}(t-t_{j+m-1}^n)\prod_{k=1}^{m-1}T_{t_{j+k}^n}(t_{j+k+1}^n - t_{j+k}^n)T_{t_j^n}(t_{j+1}^n - s).$$

Assim $U_n(t,s)$ tem a representação

$$U_n(t,s) = \prod_{k=0}^{m}T_{\sigma_k}(\sigma_{k+1}-\sigma_k) \tag{1.5}$$

onde $\sigma_0 = s$, $\sigma_{m+1} = t$ e $\sigma_k = t^n_{j+k}$.
Como $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável, da proposição 1.4.2 temos

$$||U_n(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} = ||\prod_{k=0}^{m} T_{\sigma_k}(\sigma^n_{j+k+1} - \sigma_k)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp[\omega \sum_{k=0}^{m}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)]$$

donde

$$||U_n(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega(t-s)}. \tag{1.6}$$

Além disso, é claro que $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é um sistema de evolução, isto é $U_n(t,t) = I$, $U_n(t,s) = U_n(t,r)U_n(r,s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ e

$$(t,s) \in \Delta \mapsto U_n(t,s) \in \mathcal{L}(X) \quad \text{é fortemente contínua em} \quad \Delta. \tag{1.7}$$

Da hipótese H_2 e o teorema 1.3.5, para cada $t \in [0,T]$ a família $\{T_t(s)|_Y\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 em Y gerado por $\tilde{A}(t)$, e $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável em Y com constantes de estabilidade $(\tilde{M},\tilde{\omega})$. Assim dado $y \in Y$ temos por (1.5)

$$U_n(t,s)y = \prod_{k=0}^{m} T_{\sigma_k}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)y \in Y$$

isto é $U_n(t,s)Y \subseteq Y$ e

$$||U_n(t,s)y||_Y \leq ||\prod_{k=0}^{m} T_{\sigma_k}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)||_{\mathcal{L}(Y)}||y||_Y \leq \tilde{M}e^{\tilde{\omega}(t-s)}||y||_Y.$$

∎

Como última proposição antes da prova do teorema 1.2 temos

Proposição 1.5. Para cada $y \in Y$

$$\partial_t U_n(t,s)y = A_n(t)U_n(t,s)y \quad \text{se} \quad t \neq t^n_j, \quad j = 0,\ldots,n \tag{1.8}$$
$$\partial_s U_n(t,s)y = -U_n(t,s)A_n(s)y \quad \text{se} \quad s \neq t^n_j, \quad j = 0,\ldots,n \tag{1.9}$$

Mais ainda, para cada $x \in X$ a seqüência $\{U_n(t,s)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em X uniformemente em Δ.

Prova.
Seja $k = 1,\ldots,n$ fixo e suponhamos que $t^n_{k-1} < t < t^n_k$. Se $t^n_{k-1} \leq s \leq t^n_k$ então $U_n(t,s) = T_{t^n_{k-1}}(t-s)$ e

$$\partial_t U_n(t,s)y = \partial_t T_{t^n_{k-1}}(t-s)y = A(t^n_{k-1})T_{t^n_{k-1}}(t-s)y = A_n(t)U_n(t,s)y$$

da proposição 1.2.7 pois $y \in Y \subseteq \mathcal{D}(A(t_n))$. Se $s < t_{k-1}^n < t$ então

$$U_n(t,s)y = U_n(t,t_{k-1}^n)\ U_n(t_{k-1}^n,s)y = T_{t_{k-1}^n}(t-t_{k-1}^n)U_n(t_{k-1}^n,s)y \tag{1.10}$$

mas já sabemos que $U_n(t_{k-1}^n,s)y \in Y \subseteq \mathcal{D}(A(t))$, então pela proposição 1.2.7 em (1.10) obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t U_n(t,s)y &= A_n(t_{k-1}^n)T_{t_{k-1}^n}(t-t_{k-1}^n)U_n(t_{k-1}^n,s)y\\ &= A_n(t_{k-1}^n)U_n(t,t_{k-1}^n)U_n(t_{k-1}^n,s)y\\ &= A_n(t)U_n(t,s)y.\end{aligned}$$

Isto prova (1.8), a prova de (1.9) é similar.

Seja $y \in Y$ e $m,n \geq 1$ fixos, se $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ e $r \notin \{t_k^n\}_{k=0}^n \cup \{t_k^m\}_{k=0}^m$, de (1.8) e (1.9) segue-se que a aplicação $r \mapsto U_n(t,r)U_m(r,s)y$ é diferenciável em r, e

$$\begin{aligned}\partial_r U_n(t,r)U_m(r,s)y &= U_n(t,r)A_m(r)U_m(r,s)y - U_n(t,r)A_n(r)U_m(r,s)y\\ &= U_n(t,r)[A_m(r)-A_n(r)]U_m(r,s)y.\end{aligned}$$

Integrando em $[s,t]$ e usando continuidade

$$U_m(t,s)y - U_n(t,s)y = \int_s^t U_n(t,r)[A_m(r)-A_n(r)]U_m(r,s)y dr.$$

Assim

$$\begin{aligned}||U_m(t,s)y &- U_n(t,s)y||_X\\ &\leq \int_s^t ||U_n(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||A_m(r)-A_n(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}||U_m(r,s)y||_Y dr\\ &\leq M\tilde{M}e^{\omega(t-r)+\tilde{\omega}(r-s)}||y||_Y\int_s^t ||A_m(r)-A_n(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dr\end{aligned}$$

se $\gamma = \max\{\omega,\tilde{\omega}\}$ obtemos

$$\begin{aligned}||U_m(t,s)y &- U_n(t,s)y||_X\\ &\leq M\tilde{M}Te^{\omega\gamma T}||y||_Y \sup\{||A_m(r)-A_n(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)} : r \in [0,T]\}.\end{aligned}$$

Logo por (1.3)

$$||U_m(t,s)y - U_n(t,s)y||_X \to 0 \quad \text{quando} \quad m,n \to \infty.$$

Portanto, a seqüência $\{U_n(t,s)y\}_{n\in N}$ converge em X, uniformemente em Δ. Como Y é denso em X e $||U_n(t,s)y||_{\mathcal{L}(Y)}$ é uniformemente limitado, $\{U_n(t,s)x\}_{n\in N}$ converge em X uniformemente em Δ, para cada $x \in X$. ∎

Prova do Teorema 1.2.

Definimos $U(t,s)$ em X por

$$U(t,s)x = \lim_{n\to\infty} U_n(t,s)x \quad \text{para} \quad x \in X, \quad (t,s) \in \Delta. \tag{1.11}$$

É claro que $U(t,t) = I$, $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ se $0 \le s \le r \le t \le T$, e da convergência uniforme temos a convergência forte da aplicação $(t,s) \in \Delta \mapsto U(t,s)$ na forma $||\cdot||_X$; portanto $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é um sistema de evolução em X.

De outro lado, para $(t,s) \in \Delta$ temos por (1.6)

$$\begin{aligned} ||U(t,s)x||_X &= ||\lim_{n\to\infty} U_n(t,s)x||_X = \lim_{n\to\infty} ||U_n(t,s)x||_X \\ &\le \lim_{n\to\infty} ||U_n(t,s)x||_{\mathcal{L}(X)} ||x||_X \le Me^{\omega(t-s)}||x||_X \end{aligned}$$

então $||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega(t-s)}$, o que prova E_1.

Mostremos que E_2 é válida, isto é, para cada $y \in Y$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U(s+h,s)y - y}{h} = A(s)y \tag{1.12}$$

em X para todo $s \in [0,t]$.

De fato, fixando $\tau \in [0,T]$ seja $0 \le s \le r \le t \le T$. Como na proposição 1.5, se $r \ne t_k^n$, $k = 0, \ldots, n$ então podemos derivar $r \mapsto U_n(t,r)T_\tau(r-s)y$, e assim de (1.9)

$$\partial_t U_n(t,r)T_\tau(r-s)y = U_n(t,r)[A(\tau) - A_n(r)]T_\tau(r-s)y,$$

integrando em $[s,t]$ obtemos

$$T_\tau(t-s)y - U_n(t,s)y = \int_s^t U_n(t,r)[A(\tau) - A_n(r)]T_\tau(r-s)y\,dr.$$

Portanto

$$||T_\tau(t-s)y - U_n(t,s)y||_X \le M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)}||y||_Y \int_s^t ||A(\tau) - A_n(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dr$$

onde $\gamma = \max\{\omega, \tilde{\omega}\}$. Passando ao limite quando $n \to \infty$, de (1.3) temos

$$||T_\tau(t-s)y - U(t,s)y||_X \le M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)}||y||_Y \int_s^t ||A(\tau) - A(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dr. \tag{1.13}$$

Escolhendo $\tau = s$ e $t = s+h$ em (1.13), e dividindo por $h > 0$ temos

$$\frac{1}{h}||T_s(h)y - U(s+h,s)y||_X \le \frac{M\tilde{M}e^{\gamma h}}{h}||y||_Y \int_s^{s+h} ||A(s) - A(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dr,$$

assim por H_3

$$\frac{1}{h}||T_s(h)y - U(s+h,s)y||_X \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0^+. \tag{1.14}$$

Observando que se $0 \leq s < s+h \leq T$, então

$$\frac{1}{h}\Big[U(s+h,s)y - y\Big] = \frac{1}{h}\Big[U(s+h,s)y - T_s(h)y\Big] + \frac{1}{h}\Big[T_s(h)y - y\Big]$$

se conclui de (1.14) que

$$\left|\left|\frac{U(s+h,s)y-y}{h} - \frac{T_s(h)y-y}{h}\right|\right|_X \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0^+. \tag{1.15}$$

Como $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T_s(h)y-y}{h} = \partial_t^+ T_s(t-s)y|_{t=s} = A(s)y$ segue-se de (1.15) que o mesmo acontece com $\partial_t^+ U(t,s)|_{t=s}$ e

$$\partial_t^+ U(t,s)|_{t=s} = A(s)y$$

o que prova E_2.

Vejamos agora que para cada $y \in Y$

$$\partial_s U(t,s)y = -U(t,s)A(s)y \quad \text{para} \quad (t,s) \in \Delta.$$

Observamos primeiro que se $h < 0$ então $0 \leq t+h < t \leq T$ e

$$\frac{1}{h}\Big[U(t,t+h)y - y\Big] = \frac{1}{h}\Big[U(t,t+h)y - T_s(-h)y\Big] + \frac{1}{h}\Big[T_s(-h)y - y\Big].$$

Escolhendo $\tau = t$ e $s = t+h$ em (1.13), e dividindo por $|h| > 0$ temos

$$\left|\left|\frac{1}{h}\Big[U(t,t+h)y - T_t(-h)y\Big]\right|\right|_X \leq \frac{M\tilde{M}e^{-\gamma h}}{|h|}||y||_Y \int_{t+h}^{t} ||A(t)-A(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dr$$

assim

$$\left|\left|\frac{1}{h}\Big[U(t,t+h)y - T_t(-h)y\Big]\right|\right|_X \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0^-.$$

Portanto

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{U(t,t+h)y-y}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{T_t(-h)y-y}{h} = -A(t)y. \tag{1.16}$$

Assim supondo que $0 \leq s < s+h \leq T$ então para $y \in Y$

$$\frac{U(t,s+h)y - U(t,s)y}{h} = U(t,s+h)\Big[\frac{y - U(s+h,s)y}{h}\Big].$$

Como $||U(t,s+h)|| \leq Me^{\omega T}$, de (1.16) consegue-se

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{U(t,s+h)y - U(t,s)y}{h} = -U(t,s)A(s)y.$$

Agora, supondo que $0 \leq s+h < s \leq T$, então para $y \in Y$

$$\frac{U(t,s+h)y - U(t,s)y}{h} = U(t,s)\left[\frac{U(s+h,s)y - y}{h}\right]$$

assim por (1.16)

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{U(t,s+h)y - U(t,s)y}{h} = -U(t,s)A(s)y$$

o que prova E_3.

Para provar a unicidade, suponhamos $\{V(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é outra família de operadores lineares limitados em X que satisfaz as mesmas propriedades de $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$. Sejam $n \geq 1$ e $0 \leq s \leq t \leq T$ dados, então para $y \in Y$ a aplicação $r \in [s,t] \mapsto V(t,r)U_n(r,s)y$ é diferenciável se $r \neq t_j^n$ onde $j = 0,\ldots,n$, pela proposição 1.5. Assim

$$\partial_t V(t,r)U_m(r,s)y = V(t,r)A_n(r)U_n(r,s)y - V(t,r)A(r)U_n(r,s)y.$$

Integrando em $[s,t]$ e pela continuidade

$$U_n(t,s)y - V(t,s)y = \int_s^t V(t,r)[A_n(r) - A(r)]U_n(r,s)y dr.$$

Assim

$$\begin{aligned} ||U_n(t,s)y \; &- \; V(t,s)y||_X \\ &\leq \int_s^t ||V(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||A_n(r) - A(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)}||U_n(r,s)y||_Y dr \\ &\leq \tilde{M}e^{\tilde{\omega}t}S||y||_Y \int_s^t ||A_n(r) - A(r)||_{\mathcal{L}(Y,X)} dr \end{aligned}$$

onde $S = \sup\{||V(t,r)||_{\mathcal{L}(X)} : (t,r) \in \Delta\}$, donde

$$||U_n(t,s)y - V(t,s)y||_X \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

logo $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(t,s)y = V(t,s)y$, portanto $U(t,s)y = V(t,s)y$ para $y \in Y$. Mas Y é denso em X, então $U(t,s) = V(t,s)$ para cada $(t,s) \in \Delta$. ∎

Notemos que não obtemos uma solução a valores em Y para o problema (H), isto é, não provamos a igualdade (1.2). A razão para isto, é que as hipóteses não garantem que $A(t)U(t,s)y$ faça sentido para todo $y \in Y$. Levando em conta isto, para obter uma solução a valores em Y precisamos que $U(t,s)Y \subseteq Y$ para todo $t \in [0,T]$; que em relação à norma de Y a aplicação $t \in [0,T] \mapsto U(t,s)y$ seja uma aplicação contínua, e a igualdade (1.2) seja satisfeita.

A seguinte proposição mostra que a existência e unicidade do sistema de evolução associado ao problema (H), junto com duas das condições acima, garantem a existência e unicidade de soluções a valores em Y.

Proposição 1.6. Suponhamos que $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaça as hipóteses do teorema 1.2, e seja $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ seu sistema de evolução associado. Se

E_4: $U(t,s)Y \subseteq Y$ para todo $(t,s) \in \Delta$, e

E_5: Para cada $y \in Y$ a aplicação $(t,s) \mapsto U(t,s)y$ é contínua.

Então para cada $y \in Y$ a função $u(t) = U(t,s)y$ com $s \leq t \leq T$, é a única solução a valores em Y do problema (H).

Prova.

Temos que $u(s) = U(s,s)y = y$ e a aplicação $t \in [s,T] \mapsto U(t,s)y \in Y$ é contínua por E_5, assim $u \in C([s,T],Y)$. Agora seja $s \leq t < t+h \leq T$, então

$$\begin{aligned} U(t+h,s)y - U(t,s)y &= U(t+h,t)U(t,s)y - U(t,s)y \\ &= [U(t+h,t) - I]U(t,s)y. \end{aligned}$$

De E_3 no teorema 1.2 obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t^+ u(t) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{U(t+h,s)y - U(t,s)y}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \left[\frac{U(t+h,s)y - y}{h}\right] U(t,s)y = A(t)U(t,s)y. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Como $u \in C([s,T],Y)$ e $A \in C([0,T],\mathcal{L}(Y,X))$ então $\partial_t^+ u \in C([s,T],X)$. Portanto $u \in C^1([s,T],X)$, e de (1.17) pela proposição 1.1. temos $\partial_t u(t) = A(t)U(t,s)y$, isto é $\partial_t u(t) = A(t)u(t)$. ■

O problema é agora impôr condições à família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ para que o único sistema de evolução associado satisfaça as hipóteses da proposição 1.6. Kato em [K2] substitui H_2 por

H_2^-: Existe uma família $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$ de isomorfismos de Y em X tal que $S(t): Y \to X$ é fortemente continuamente diferenciável e

$$S(t)A(t)S(t)^{-1} = A(t) + B(t)$$

onde $B(t)$ é fortemente contínua.

Então Kato mostra que H_1 e H_2^- implicam H_2. Logo do teorema 1.2, existe um único sistema de evolução em X que satisfaz E_1, E_2 e E_3. Finalmente prova que as hipóteses H_1, H_2^- e H_3 também implicam as hipóteses na proposição 1.6. Esse resultado é fortalecido em [K3] substituindo estabilidade por quase estabilidade em H_1, e continuidade forte por mensurabilidade forte em H_2^-.

Neste trabalho, visando a aplicação que faremos no capítulo 3, vamos substituir simplesmente H_2^-, como em [K4], e logo segue-se o caminho acima descrito.

Consideramos então

H_2^+: Existe um isomorfismo linear $S: Y \to X$ tal que

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t) \tag{1.18}$$

onde $B: [0,T] \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente mensurável e limitada de $[0,T]$ em $\mathcal{L}(X)$.

A relação (1.18) deve ser interpretada da maneira seguinte, se $y \in Y$ então $S^{-1}y \in Y \subseteq \mathcal{D}(A(t))$, $A(t)S^{-1}y \in Y$ e vale a igualdade.

Nosso objetivo agora é mostrar que com as hipóteses H_1, H_2^+ e H_3, satisfazem as hipóteses da proposição 1.6. Como foi dito, primeiro provamos a seguinte proposição.

Proposição 1.7. As condições H_1 e H_2^+ implicam H_2.

Prova.

É claro que o isomorfismo S satisfaz as condições (1) e (2) do teorema 1.4.4. Além disso, de H_1 a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável em X, e de H_2^+ existe $C > 0$ tal que $||B(t)||_{\mathcal{L}(X)} \le C$ para todo $t \in [0,T]$. Logo, pelo teorema 1.4.3,

$$\{A(t) + B(t) = SA(t)S^{-1}\}_{t\in[0,T]}$$

é uma família estável de geradores com constantes de estabilidade $(M, \omega + CM)$; assim a condição (3) do teorema 1.4.4 é satisfeita. Portanto, Y é $A(t)$-admissível para cada $t \in [0,T]$, e $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável de geradores em Y. ■

Proposição 1.8. Seja $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ um sistema de evolução em X tal que $||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para todo $(t,s) \in \Delta$. Se $\{H(t)\}_{t\in[0,T]} \subseteq \mathcal{L}(X)$ é uma família fortemente mensurável e limitada, então existe uma única $\{W(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta} \subseteq \mathcal{L}(X)$ tal que

$$W(t,s)x = U(t,s)x + \int_s^t W(t,r)H(r)U(r,s)x dr \tag{1.19}$$

para cada $x \in X$, e $W(t,s)x$ é contínua em $(t,s) \in \Delta$.

Prova.

Seja $x \in X$ e definamos $\{W_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ por

$$\begin{cases} W_0(t,s)x = U(t,s)x \\ \\ W_{n+1}(t,s)x = \displaystyle\int_s^t W_n(t,r)H(r)U(r,s)x dr. \end{cases}$$

Para cada $(t,s) \in \Delta$ fixo, o integrando em W_{n+1} é fortemente mensurável pela proposição 1.1.9. Como $\{H(t)\}_{t\in[0,T]}$ é limitada de $[0,T]$ em $\mathcal{L}(X)$, existe $N \in \mathbb{R}^+$ tal que $||H(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq N$ para todo $t \in [0,T]$.

Afirmação. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $W_n(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ e

$$||W_n(t,s)x||_X \leq \frac{M^{n+1}N^n}{n!}(t-s)^n||x||_X \tag{1.20}$$

De fato.

Por indução, como $||W_0(t,s)x||_X = ||U(t,s)x||_X \leq ||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, temos que,

$$\begin{aligned} ||W_1(t,s)x||_X &\leq \int_s^t ||W_0(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||H(r)||_{\mathcal{L}(X)}||U(r,s)||_{\mathcal{L}(X)}||x||_X dr \\ &\leq M^2N(t-s)||x||_X. \end{aligned}$$

Supondo (1.20) temos

$$\begin{aligned} ||W_{n+1}(t,s)x||_X &\leq \int_s^t ||W_n(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||H(r)||_{\mathcal{L}(X)}||U(r,s)||_{\mathcal{L}(X)}||x||_X dr \\ &\leq \frac{M^{n+2}N^{n+1}}{n!}||x||_X \int_s^t (t-r)^n dr \\ &= \frac{M^{n+2}N^{n+1}}{(n+1)!}(t-s)^{n+1}||x||_X \end{aligned}$$

o que prova (1.20). É claro que $W_n(t,s)$ é linear e de

$$\sup\{||W_n(t,s)x||_X : ||x||_X = 1\} \leq \frac{M^{n+1}N^n}{n!}(t-s)^n$$

temos que $W_n(t,s) \in \mathcal{L}(X)$. □

Afirmação. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n(t,s)$ é fortemente contínua de $[0,T]$ em $\mathcal{L}(X)$.

De fato.

Estendemos $W_n(t,s)$ e $U(t,s)$ a $[0,T]^2$ fazendo $W_1 = 0$ e $U = 0$ fora de Δ, então para cada $x \in X$

$$\begin{aligned} ||W_n(t_n,s_n)x - W_n(t,s)x||_X &\leq \int_0^T ||W_n(t_n,r)H(r)[U(r,s_n) - U(r,s)]x||_X dr \\ &+ \int_0^T ||[W_n(t_n,r) - W_n(t,r)]H(r)U(r,s)x||_X dr. \end{aligned}$$

Assim

$$||W_n(t_n,s_n)x - W_n(t,s)x||_X \to 0 \quad \text{quando} \quad t_n \to t \quad \text{e} \quad s_n \to s$$

pois o segundo membro converge para zero pelo teorema da convergência dominada. Portanto, $W_n(\cdot,\cdot)x : \Delta \to X$ é contínua, logo $W_n(t,s)$ é fortemente contínua de $[0,T]$ em $\mathcal{L}(X)$. □

Definimos

$$W(t,s)x = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t,s)x \tag{1.21}$$

que converge uniformemente em Δ na norma de X, pelo critério de Weirstrass. Então $W(t,s)x$ é contínua de Δ em X, i.e. $W(t,s)$ é fortemente contínua.

É óbvio que $W(t,s)$ é linear e para todo $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} ||W(t,s)x||_X &\leq \sum_{n=0}^{\infty} ||W_n(t,s)||_{\mathcal{L}(X)}||x||_X \leq \sum_{n=0}^{\infty} M^{n+1}\frac{N^n}{n!}(t-s)^n||x||_X \\ &= Me^{MN(t-s)}||x||_X. \end{aligned}$$

Assim

$$\sup\{||W(t,s)x||_X : ||x||_X = 1\} \leq Me^{MN(t-s)}$$

donde $W(t,s) \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, $W(t,s)$ é solução da equação integral (1.19). De fato, da convergência uniforme em (1.21) temos

$$\begin{aligned}
U(t,s)x &+ \int_s^t W(t,r)H(r)U(r,s)xdr \\
&= U(t,s)x + \sum_{n=0}^{\infty}\int_s^t W_n(t,r)H(r)U(r,s)xdr \\
&= U(t,s)x + \sum_{n=0}^{\infty} W_{n+1}(t,s)x
\end{aligned}$$

pois pela definição $W_0(t,s)x = U(t,s)x$.
Para a unicidade, suponhamos que $V(t,s)$ satisfaz as condições do teorema, então

$$V(t,s)x = U(t,s)x + \int_s^t V(t,r)H(r)U(r,s)xdr$$

logo

$$W(t,s)x - V(t,s)x = \int_s^t [W(t,r) - V(t,r)]H(r)U(r,s)xdr$$

portanto

$$\begin{aligned}
||W(t,s)x - V(t,s)x||_X &\leq \int_s^t ||[W(t,r) - V(t,r)]H(r)U(r,s)x||_X dr \\
&\leq MN\int_s^t ||W(t,r) - V(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||x||_X dr
\end{aligned}$$

pelo lema de Gronwall resulta que

$$||W(t,s)x - V(t,s)x||_X = 0$$

então $W(t,s)x = V(t,s)x$ para todo $x \in X$, assim $W(t,s) = V(t,s)$. ∎

Portanto, se a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições H_1, H_2^+ e H_3, pela proposição anterior, podemos aplicar o teorema 1.2. Finalmente o seguinte teorema mostra que com as mesmas hipóteses também se verificam E_4 e E_5, isto é, pela proposição 1.6, existe uma única solução a valores em Y do problema de evolução (H).

Teorema 1.9. Se $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ verifica H_1, H_2^+ e H_3, então para todo $y \in Y$ existe uma única solução a valores em Y

$$u(t) = U(t,s)y$$

de (H), onde $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é o único sistema de evolução associado com $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ pelo teorema 1.2.

Prova.

Da proposição 1.7 e o teorema 1.2, existe um único sistema de evolução $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ que verifica E_1, E_2 e E_3.

Seja $x \in X$, da hipótese H_2^+ e da proposição 1.8 temos uma única família fortemente contínua $\{W(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ de operadores lineares limitados em X satisfazendo

$$W(t,s)x = U(t,s)x + \int_s^t W(t,r)B(r)U(r,s)xdr \tag{1.22}$$

então

$$S^{-1}W(t,s)x = S^{-1}U(t,s)x + \int_s^t S^{-1}W(t,r)B(r)U(r,s)xdr. \tag{1.23}$$

Vejamos que $U(t,s)S^{-1}$ é a solução única de

$$V(t,s)x = S^{-1}U(t,s)x + \int_s^t V(t,r)B(r)U(r,s)xdr.$$

De fato, se $x \in X$ então $S^{-1}x \in Y$ e

$$\partial_r U(t,r)S^{-1}x = -U(t,r)A(r)S^{-1}x$$

mas de H_2^+ temos

$$A(r)S^{-1} = S^{-1}[A(r) + B(r)]$$

para $r \in [0,T]$, se $y \in Y \subseteq \mathcal{D}(A(t))$, assim

$$\partial_r U(t,r)S^{-1}x = -U(t,r)S^{-1}[A(r) + B(r)]x. \tag{1.24}$$

Do teorema 1.2,

$$\partial_r U_n(r,s)x = A_n(r)U_n(r,s). \tag{1.25}$$

Logo de (1.24) e (1.25) obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_r U(t,r)S^{-1}U_n(r,s)y &= -U(t,r)S^{-1}[A(r)+B(r)]U_n(r,s)y + U(t,r)S^{-1}A_n(r)U_n(r,s)y \\
&= U(t,r)S^{-1}[A_n(r) - A(r) - B(r)]U_n(r,s)y
\end{aligned}$$

integrando em $[s,t]$

$$S^{-1}U_n(t,s)y - U(t,s)s^{-1}y = \int_s^t U(t,r)S^{-1}[A_n(r) - A(r) - B(r)]U_n(r,s)ydr. \tag{1.26}$$

Como

$$\begin{aligned}
&|| \int_s^t U(t,r)S^{-1}[A_n(r) - A(r)]U_n(r,s)ydr||_{\mathcal{L}(Y)} \\
&\leq \int_s^t ||U(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||S^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)}||A_n(r) - A(r)||_{\mathcal{L}(X)}||U_n(r,s)||_{\mathcal{L}(X)}||y||_Y dr \\
&\leq M\tilde{M}e^{\omega(t-r)}C||y||_Y \int_s^t ||A_n(r) - A(r)||_{\mathcal{L}(X)}dr \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, passando ao limite quando $n \to \infty$ em (1.26) obtemos

$$U(t,s)S^{-1}y - S^{-1}U(t,s)y = \int_s^t U(t,r)S^{-1}B(r)U(r,s)ydr.$$

Como os operadores nesta igualdade são limitados e $\overline{Y} = X$ temos

$$U(t,s)S^{-1}x = S^{-1}U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)S^{-1}B(r)U(r,s)xdr \tag{1.27}$$

para todo $x \in X$.
Portanto de (1.23), (1.27) e pela unicidade, concluimos que existe uma única família $\{W(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta} \subseteq \mathcal{L}(X)$ fortemente contínua tal que

$$S^{-1}W(t,s) = U(t,s)S^{-1}. \tag{1.28}$$

Seja $y \in Y$ então $Sy \in X$ e

$$U(t,s)y = S^{-1}W(t,s)Sy \in Y$$

isto é $U(t,s)Y \subseteq Y$ o que prova E_4. Além disso, $U(t,s)y$ é a composição das aplicações contínuas

$$\Delta \xrightarrow{Sy} X \xrightarrow{W(t,s)} X \xrightarrow{S^{-1}} Y$$

o que prova E_5. Portanto, pela proposição 1.6, para todo $y \in Y$ a função $u(t) = U(t,s)y$ é a única solução a valores em Y de (H). ∎

Antes de concluir a seção, provamos algumas estimativas para

$$||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)} = \text{Sup}\{||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} : (t,s) \in \Delta\},$$

e para

$$||U||_{\infty,\mathcal{L}(Y)} = \text{Sup}\{||U(t,s)||_{\mathcal{L}(Y)} : (t,s) \in \Delta\},$$

em termos das *constantes primitivas* de $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$, isto é, suas constantes de estabilidade (M,ω), $||S||_{\mathcal{L}(Y,X)}$, $||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e

$$||B||_{\infty,\mathcal{L}(X)} = \text{Sup}\{||B(t)||_{\mathcal{L}(X)} : t \in [0,T]\}$$

Proposição 1.10. Suponhamos que $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ cumpre as condições H_1, H_2^+ e H_3, então o sistema de evolução associado $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ satisfaz

$$||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega T} \tag{1.29}$$

e

$$||U||_{\infty,\mathcal{L}(Y)} \leq M||S||_{\mathcal{L}(Y,X)}||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X,Y)}e^{T(\omega+M||B||_{\infty,\mathcal{L}(X)})} \tag{1.30}$$

Prova.
Notemos que de E_1, $||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(t-s)}$ para todo $(t,s) \in \Delta$, logo

$$||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)} = \text{Sup}\{||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} : (t,s) \in \Delta\} \leq Me^{\omega T},$$

o que mostra (1.29).
Agora, de (1.28) temos que $U(t,s) = S^{-1}W(t,s)S$, logo

$$||U(t,s)||_{\mathcal{L}(Y)} \leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,X)}||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X,Y)}||W(t,s)||_{\mathcal{L}(X)}. \tag{1.31}$$

Mas de (1.22),

$$||W(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} + \int_s^t ||W(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||B(r)||_{\mathcal{L}(X)}||U(r,s)||_{\mathcal{L}(X)}dr.$$

Então, por (1.29)

$$e^{\omega s}||W(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} + M\int_s^t e^{\omega r}||W(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||B(r)||_{\mathcal{L}(X)}dr.$$

Agora usando a desigualdade de Gronwall e multiplicando por $e^{-\omega s}$ obtemos

$$||W(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-s)+M\int_s^t ||B(r)||_{\mathcal{L}(X)}dr}.$$

Logo, substituindo em (1.31)

$$||U(t,s)||_{\mathcal{L}(Y)} \leq M||S||_{\mathcal{L}(Y,X)}||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X,Y)}e^{\omega(t-s)+M\int_s^t ||B(r)||_{\mathcal{L}(X)}dr}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}||U||_{\infty,\mathcal{L}(Y)} &= \operatorname{Sup}\{||U(t,s)||_{\mathcal{L}(Y)} : (t,s) \in \Delta\} \\ &\leq M||S||_{\mathcal{L}(Y,X)}||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X,Y)}e^{T(\omega+M||B||_{\infty,\mathcal{L}(X)})}\end{aligned}$$

o que prova (1.30). ∎

Antes de encerrar a seção, mencionamos que a prova do teorema 1.9, é devida a J.R. Dorroch [D], e é mais simples que as apresentadas por Kato em [K2] e [K3].

Também, é importante destacar entre as generalizações do teorema 1.9, a de Kobayasi. Em [K2] e [K3] se assume na hipótese H_3 que $t \in [0,T] \mapsto A(t)$ é uma aplicação contínua na norma de $\mathcal{L}(Y,X)$. Em [Ko] o teorema é fortalecido substituindo a continuidade pela continuidade forte [veja a definição 1.1.2].

2.2. A Equação Não Homogênea. Soluções Amenas (Mild).

Nesta seção $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de geradores de semigrupos de classe C_0 em X satisfazendo as condições H_1, H_2^+ e H_3, e $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ é o sistema de evolução associado, conforme o teorema 1.9.

Teorema 2.1. Seja $f \in C([s,T],X)$. Se u é uma solução a valores em Y de (L) então

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr. \tag{2.1}$$

Prova.

Das propriedades de $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ e da definição de u segue que a função

$$r \in [s,T] \mapsto U(t,r)u(r)$$

é continuamente diferenciável em X e

$$\begin{aligned}\partial r U(t,r)u(r) &= -U(t,r)A(r)u(r) + U(t,r)[A(r)u(r) + f(r)] \\ &= U(t,r)f(r).\end{aligned}$$

Integrando de s até t encontra-se (2.1). ∎

Observe-se que (2.1) faz sentido se $f \in L^1([s,T],X)$, e assim temos a seguinte

Definição 2.2. Se $f \in L^1([s,T],X)$ e $y \in Y$, a função contínua

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr$$

é chamada *solução amena* (*mild*) do problema (L).

Assim, o teorema 2.1 garante que se $f \in L^1([s,T],X)$, toda solução a valores em Y de (L) é uma solução amena. No entanto, a função definida em 2.1 pode não ser diferenciável em relação a t, logo para garantir a recíproca precisamos impôr condições adicionais sobre y e f. Em primeiro lugar temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3. Sejam $y \in X$ e $f \in L^1([s,T],X)$. Se

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr$$

para $t \in [s,T]$, então $u \in C([s,T],X)$ e

$$||u||_{\infty,X} \leq ||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)}(||y||_X + ||f||_{1,X}) \tag{2.2}$$

onde $||u||_{\infty,X} = \text{Sup}\{||u(t)||_X : t \in [s,T]\}$ e $||f||_{1,X} = \int_s^t ||f(r)||_X dr$.

Prova.

Supondo $f \in C([s,T]X)$ então é claro que $u \in C([s,T],X)$ e

$$\begin{aligned} ||u(t)||_X &\leq ||U(t,s)||_{\mathcal{L}(X)}||y||_X + \int_s^t ||U(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||f(r)||_X dr \\ &\leq ||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)}(||y||_X + \int_s^t ||f(r)||_X dr \end{aligned}$$

logo

$$||u||_{\infty,X} \leq ||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)}(||y||_X + ||f||_{1,X}).$$

Suponhamos $f \in L^1([s,t],X)$, como $C([s,T],X)$ é denso em $L^1([s,t],X)$, existe uma seqüência $\{f_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ em $C([s,T],X)$ tal que $f_n \xrightarrow{L^1} f$, isto é $||f_n - f||_{1,X} \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)f_n(r)dr \quad \text{para} \quad t \in [s,T].$$

Pelo já visto $u_n \in C([s,T],X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e $u_n \to u$ uniformemente em $[s,T]$ pois

$$\begin{aligned} ||u_n(t) - u(t)||_X &= || \int_s^t U(t,r)[f_n(r) - f(r)]dr||_X \\ &\leq || \int_s^t ||U(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||f_n(r) - f(r)||_X dr \end{aligned}$$

$$||u_n(t) - u(t)||_X \leq ||U||_{\infty,\mathcal{L}(X)}||f_n - f||_{1,X} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo $u \in C([s,T],X)$ e a prova da desigualdade (2.2) é imediata. ∎

De modo análogo se prova.

Proposição 2.4. Sejam $y \in Y$ e $f \in L^1([s,T],Y)$. Se

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr$$

para $t \in [s,T]$, então $u \in C([s,T],Y)$ e

$$||u||_{\infty,Y} \leq ||U||_{\infty,\mathcal{L}(Y)}(||y||_Y + ||f||_{1,Y}). \tag{2.3}$$

Podemos agora provar

Teorema 2.5. Seja

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr.$$

Se $y \in Y$ e $f \in C([s,T],X) \cap L^1([s,T],Y)$, então u é uma solução a valores em Y de (L). Além disso,

$$||\partial_t u||_{\infty,X} \leq ||A||_{\infty,\mathcal{L}(Y,X)}||u||_{\infty,Y} + ||f||_{\infty,X} \tag{2.4}$$

onde $||A||_{\infty,\mathcal{L}(Y,X)} = \mathrm{Sup}\{||A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} : t \in [s,T]\}$.

Prova.

Se consideramos o problema de evolução linear homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = A(t)v(t) & 0 \leq s < t \leq T \\ \\ v(s) = y \end{cases} \tag{2.5}$$

sabemos da seção anterior que $v(t) = U(t,s)y$ é sua solução a valores em Y, isto é $v \in C([s,T],Y) \cap C^1((s,T],X)$ e satisfaz (L). Mostremos a seguinte afirmação

Afirmação. A função
$$w(t) = \int_s^t U(t,r)f(r)dr \tag{2.6}$$
é solução do problema
$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t)u(t) + f(t) & 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

De fato.
Como $w(s) = \int_s^s U(t,r)f(r)dr = 0$, resta calcular $\partial_t u$. Supondo $h > 0$ temos que $s \leq t < t + h \leq T$ e
$$\begin{aligned} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\int_s^{t+h} U(t+h,r)f(r)dr - \int_s^t U(t,r)f(r)dr\Big] \\ &= \frac{1}{h}\Big[\int_s^t [U(t+h,r) - U(t,r)]f(r)dr + \int_t^{t+h} U(t+h,r)f(r)dr\Big] \\ &= \int_0^T \mathcal{X}_{[s,t]}(r)\frac{U(t+h,r) - U(t,r)}{h}f(r)dr + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,r)f(r)dr. \end{aligned}$$
Pelo teorema da convergência dominada
$$\int_0^T \mathcal{X}_{[s,t]}(r)\frac{U(t+h,r) - U(t,r)}{h}f(r)dr \to A(t)w(t) \quad \text{quando} \quad h \to 0^+$$
enquanto
$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,r)f(r)dr \to f(t) \quad \text{quando} \quad h \to 0^+$$
pois é o valor médio no intervalo $[t, t+h]$ de uma função contínua. Assim
$$\partial_t^+ w(t) = A(t)w(t) + f(t).$$

No caso $h < 0$ o argumento é análogo, portanto
$$\partial_t w(t) = A(t)w(t) + f(t) \tag{2.8}$$
e a afirmação está provada. □

Logo a função $u(t) = v(t) + w(t)$ têm as seguintes propriedades:

i. $u \in C[s,T],Y)$ da proposição 2.4, pois $y \in Y$ e $f \in L^1([s,t],Y)$.

ii. $u \in C^1((s,T],X)$ pois $v \in C^1((s,T],X)$ e $f \in C([s,T],X)$ implica, de (2.8), que $w \in C^1((s,T.X)$.

iii. u satisfaz (L), pois $u(s) = v(s) + w(s) = y$ e

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= \partial_t v(t) + \partial_t w(t) = A(t)v(t) + A(t)w(t) + f(t) \\ &= A(t)[v(t) + w(t)] + f(t) = A(t)u(t) + f(t). \end{aligned}$$

Daí obtemos que u é uma solução a valores em Y de (L) e

$$\begin{aligned} ||\partial_t u(t)||_X &\leq ||A(t)u(t)||_X + ||f(t)||_X \\ &\leq ||A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)}||u(t)||_Y + ||f(t)||_X \\ &\leq ||A||_{\infty,\mathcal{L}(Y,X)}||u||_{\infty,Y} + ||f||_{\infty,X} \end{aligned}$$

logo

$$||\partial_t u||_{\infty,X} \leq ||A||_{\infty,\mathcal{L}(Y,X)}||u||_{\infty,Y} + ||f||_{\infty,X}. \qquad \blacksquare$$

Para concluir a seção observamos que de (2.3) e (2.4) temos a desigualdade

$$||\partial_t u||_{\infty,X} \leq ||f||_{\infty,X} + ||A||_{\infty,\mathcal{L}(Y,X)}||U||_{\infty,\mathcal{L}(Y)}((||y||_Y + ||f||_{1,Y}). \tag{2.9}$$

2.3. Teoremas de Perturbação e Convergência.

Nas aplicações às equações não lineares, é importante conhecer a dependência da solução de (L) quando $A(t), f(t)$ e y são submetidos a pequenas perturbações. Consideremos outro problema do mesmo tipo

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \overline{A}(t)v(t) + \overline{f}(t) & 0 \leq s < t \leq T \\ v(s) = \overline{y}. \end{cases} \tag{$\overline{L}$}$$

Suponhamos que as hipóteses do teorema 1.9 são satisfeitas pela família $\{\overline{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ com os mesmos Y e S, e seja $\{W(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ o sistema de evolução associado.

Um dos objetivos desta seção é estimar $v-u$ uniformemente nas normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, onde u e v são as soluções amenas de (L) e $(\overline{L})$ respectivamente. Os principais resultados nesse sentido são os teoremas 3.2 e 3.4.

Proposição 3.1. Sejam $y \in Y$ e $f \in L^1([s,T],Y)$. Se definimos

$$w(t) = [W(t,s) - U(t,s)]y + \int_s^t [W(t,r) - U(t,r)]f(r)dr \tag{3.1}$$

então

$$\|w(t)\|_X \leq \|W\|_{\infty,\mathcal{L}(X)}\|(\overline{A} - A)u\|_{1,X}. \tag{3.2}$$

Prova.[1]

Consideremos $y \in Y$ e $h(r) = W(t,r)U(r,s)y$. Então

$$\partial_r h(r) = -W(t,r)\overline{A}(r)U(r,s)y + W(t,r)A(r)U(r,s)y$$

logo

$$h(t) - h(s) = -\int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,s)y d\xi$$

assim

$$W(t,s)y - U(t,s)y = \int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,s)y d\xi. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.1)

$$\begin{aligned}
w(t) &= \int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,s)y d\xi \\
&\quad + \int_s^t \int_r^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,r)f(r)d\xi dr \\
&= \int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,s)y d\xi \\
&\quad + \int_s^t \int_s^\xi W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]U(\xi,r)f(r)dr d\xi \\
&= \int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]\left[U(\xi,s)y + \int_s^t U(\xi,r)f(r)dr\right]d\xi \\
&= \int_s^t W(t,\xi)[\overline{A}(\xi) - A(\xi)]u(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

[1] Como $u \in C([s,T],Y)$, então do teorema 2.5 $(\overline{A}(t) - A(t))u(t) \in X$.

Portanto

$$||w(t)||_X \leq ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}||(\overline{A}-A)u||_{1,X}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2. Sejam $y \in Y$, $f \in L^1([s,T],Y)$, $\overline{y} \in X$ e $\overline{f} \in L^1([s,T],X)$. Se u e v são as soluções amenas correspondentes a (L) e $(\overline{L})$ então

$$||v-u||_{\infty,X} \leq ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}[||\overline{y}-y||_X + ||\overline{f}-f||_{1,X} + ||(\overline{A}-A)u||_{1,X}]. \tag{3.4}$$

Prova.

Temos que

$$u(t) = U(t,s)y + \int_s^t U(t,r)f(r)dr \qquad \text{e}$$

$$v(t) = W(t,s)\overline{y} + \int_s^t W(t,r)\overline{f}(r)dr.$$

Logo

$$v(t)-u(t) = W(t,s)\overline{y} - U(t,s)y + \int_s^t [W(t,r)\overline{f}(r) - U(t,r)f(r)]dr$$

somando e subtraindo termos, depois de agrupar convenientemente obtemos

$$v(t)-u(t) = w_1(t) + w_2(t)$$

onde

$$w_1(t) = W(t,s)(\overline{y}-y) + \int_s^t W(t,r)[\overline{f}(r)-f(r)]dr \tag{3.5}$$

e

$$w_2(t) = [W(t,s)-U(t,s)]y + \int_s^t [W(t,r)-U(t,r)]f(r)dr. \tag{3.6}$$

Se $t \in [s,T]$, de (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} ||w_1(t)||_X &\leq ||W(t,s)||_{\mathcal{L}(X)}||\overline{y}-y||_X + \int_s^t ||W(t,r)||_{\mathcal{L}(X)}||\overline{f}(r)-f(r)||_X dr \\ &\leq ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}[||\overline{y}-y||_X + ||\overline{f}-f||_{1,X}] \end{aligned}$$

e comparando (3.6) com (3.1), aplicando a proposição 3.1 temos

$$||w_2(t)||_X \leq ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}||(\overline{A}-A)u||_{1,X}.$$

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Portanto

$$||v(t) - u(t)||_X \leq ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}[||\overline{y} - y||_X + ||\overline{f} - f||_{1,X} + ||(\overline{A} - A)u||_{1,X}]$$

para todo $t \in [s,T]$, o que prova (3.4). ∎

Se no teorema anterior tomamos $y = \overline{y}$, $f = \overline{f}$ e $A = \overline{A}$ obtemos

Corolário 3.3. Sejam $y \in Y$ e $f \in L^1([s,T],X)$. Então (L) têm no máximo uma solução.

Do teorema 2.5 e o corolário 3.3 temos garantida a existência e unicidade das soluções a valores em Y para o problema (L).

O seguinte resultado será utilizado no próximo capítulo para estabelecer a dependência contínua no dado inicial para as equações quase lineares. Denotamos por $\overline{B}(t)$ o operador correspondente a $B(t)$ da hipótese H_2^+.

Teorema 3.4. Sejam $y, \overline{y} \in Y$ e $f, \overline{f} \in L^1([s,T],Y)$. Se u e v são as soluções correspondentes a (L) e $(\overline{L})$, então

$$||v - u||_{\infty,Y} \leq K[||\overline{y} - y||_Y + ||\overline{f} - f||_{1,Y} + ||(\overline{B} - B)Su||_{1,X} + ||h||_{\infty,X}] \tag{3.7}$$

onde K depende apenas de $||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}$ e $||\overline{B}||_{\infty,X}$, e

$$\begin{cases} h(t) = [W(t,s) - U(t,s)]Sy + \displaystyle\int_s^t [W(t,r) - U(t,r)]g(r)dr \\ \\ g(r) = Sf(r) - B(r)Su(r) \end{cases}$$

Prova.
É claro que

$$||v(t) - u(t)||_Y \leq ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)}||Sv(t) - Su(t)||_X. \tag{3.8}$$

Como $Su(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \partial_t w(t) = A(t)w(t) + (Sf(t) - B(t)Su(t)) \\ \\ w(s) = Sy \end{cases}$$

segue que

$$Su(t) = U(t,s)Sy + \int_s^t U(t,r)[Sf(r) - B(r)Su(r)]dr. \tag{3.9}$$

Analogamente $Sv(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \partial_t w(t) = \overline{A}(t)w(t) + [(S\overline{f}(t) - \overline{B}(t)S\overline{w}(t)] \\ w(s) = S\overline{y} \end{cases}$$

portanto

$$Sv(t) = W(t,s)S\overline{y} + \int_s^t W(t,r)[S\overline{f}(r) - \overline{B}(r)S\overline{w}(r)]dr. \tag{3.10}$$

Assim de (3.7) e (3.8)

$$\begin{aligned} ||Sv(t) - Su(t)||_X \;\leq\; & ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}[||\overline{y} - y||_Y + ||\overline{f} - f||_{1,Y} + ||(\overline{B} - B)Su||_{1,X} + ||h||_{\infty,X}] \\ & + ||W||_{\infty,\mathcal{L}(X)}||B||_{\infty,X}\int_s^t [Sv(r) - Su(r)]dr. \end{aligned}$$

Então o resultado segue pela desigualdade de Gronwall. ∎

Antes de provar alguns teoremas de convergência para as soluções das equações de evolução, vejamos as seguintes proposições.

Proposição 3.5. Seja $\{T_n\}_{n\in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n y$ existe para todo $y \in Y$. Se denotamos o limite por Ty, então

1. Existe $M \in (0,\infty)$ tal que $||T_n||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$,
2. $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ e $||T||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$, e
3. $T_n y \to Ty$ uniformemente em compactos.

A primeira parte da proposição anterior é uma conseqüência do Princípio da Limitação Uniforme, a segunda se obtem do Teorema de Banach-Steinhaus, e para a terceira temos que lembrar que todo conjunto compacto em Y é totalmente limitado.

Proposição 3.6. Sejam $T, T_n \in \mathcal{L}(Y,X)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}}||T_n||_{\mathcal{L}(Y,X)} < \infty$ e $||T_n y - Ty||_X \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo y num subconjunto denso D de Y. Então $T_n \to T$ fortemente.

Para a prova pode-se consultar [K5].

Consideremos a seqüência de problemas de Cauchy em X

$$\begin{cases} \partial_t u^n(t) = A^n(t)u^n(t) + f^n(t) & 0 \le s < t \le T \\ u^n(s) = y^n. \end{cases} \tag{L^n}$$

Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, a família $\{A^n(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições

H_1: $\{A^n(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de geradores estável, com constantes de estabilidade (M, ω).

H_2^+: Existe um espaço de Banach Y, densa e continuamente contido em X, e um isomorfismo linear $S : Y \to X$ tal que

$$SA^n(t)S^{-1} = A^n(t) + B^n(t)$$

onde $B^n : [0,T] \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente mensurável e limitada de $[0,T]$ em $\mathcal{L}(X)$.

H_3: $Y \subseteq \mathcal{D}(A^n(t))$ para todo $t \in [0,T]$, $A^n(t) \in \mathcal{L}(Y, X)$ e $t \in [0,T] \mapsto A^n(t)$ é contínua na norma de $\mathcal{L}(Y, X)$.

Além disso, suponhamos que $\{||B^n||_{1,X}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Segue que os sistemas de evolução $\{U^n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ associados a $\{A^n(t)\}_{t\in[0,T]}$ existem e são uniformemente limitados tanto em $\mathcal{L}(X)$ como em $\mathcal{L}(Y)$. Assim a solução amena de (L^n) é

$$u^n(t) = U^n(t,s)y^n + \int_s^t U^n(t,r)f^n(r)dr. \tag{3.11}$$

Os seguintes teoremas garantem a convergência de u^n para a solução amena do problema (L).

Teorema 3.7. Além das hipóteses acima, suponhamos que

$$A^n(t) \to A(t) \quad \text{fortemente em} \quad \mathcal{L}(Y, X) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [0,T] \tag{3.12}$$

e que

$$\lim_{m(E)\to 0} \int_E ||A^n(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} dt = 0 \quad \text{uniformemente em} \quad n, \tag{3.13}$$

onde $m(\cdot)$ denota a medida de Lebesgue. Então

$$U^n(t,s) \to U(t,s) \quad \text{fortemente em} \quad \mathcal{L}(X) \tag{3.14}$$

uniformemente em relação a $(t,s) \in \Delta$.

Prova.

Devido à limitação uniforme da família $\{U^n(t,s)\}_{n\in N}$ e pela proposição 3.6 basta provar que

$$U^n(t,s)y \to U(t,s)y \quad \text{com} \quad y \in Y \tag{3.15}$$

em relação à topologia de X uniformemente em $(s,t) \in \Delta$. Derivando $U^n(t,r)U(r,s)y$ em relação a r, utilizando (L) e (L^n) temos

$$\begin{aligned}\partial_r U^n(t,r)U(r,s)y &= U^n(t,r)A(r)U(r,s)y - U^n(t,r)A^n(r)U(r,s)y\\ &= U^n(t,r)[A(r) - A^n(r)]U(r,s)y\end{aligned}$$

e integrando em relação a $r \in [s,t]$ obtém-se

$$U(t,s)y - U^n(t,s)y = \int_s^t U^n(t,r)[A(r) - A^n(r)]U(r,s)ydr.$$

Como $\{U^n(t,s)\}_{n\in N}$ é uniformemente limitada temos

$$||U(t,s)y - U^n(t,s)y||_X \leq C\int_s^t ||(A(r) - A^n(r))U(r,s)y||_X dr \tag{3.16}$$

mas $U(\cdot,\cdot)y : \Delta \to X$ é contínua, então

$$K = \{U(r,s)y : (r,s) \in \Delta\}$$

é um conjunto compacto.

Afirmação. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \mathrm{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(r)y||_X dr = 0.$$

De fato.

Pela hipótese $A^n(t) \xrightarrow{s} A(t)$ em $\mathcal{L}(Y,X)$ para $t \in [0,T] \setminus N$ onde $m(N) = 0$, temos pela proposição 3.5 que $(A^n - A)(t)y \to 0$ uniformemente para $y \in K$ para cada $t \in [0,T] \setminus N$ fixo. Em conseqüência

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(t)y||_X = 0 \qquad t \in [0,T]\ N. \tag{3.17}$$

Seja $f_n(t) = \text{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(t)y||_X$, então $\{f_n\}_{n\in N}$ é uma seqüência em $L^1([0,T],m)$. Como a convergência q.t.p. implica convergência em medida em espaços de medida finita, de (3.17) obtemos que $\{f_n\}_{n\in N}$ converge na medida para zero. Além disso

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \text{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(t)y||_X \\ &\leq \text{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)}||y||_X \\ &\leq M(||A^n(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} + ||A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)}) \end{aligned}$$

onde $M = \text{Sup}_{y\in K}||y||_X$. Pela proposição 3.5, existe $N_0 \in (0,\infty)$ tal que

$$||A^n(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq N_0 \quad \text{e} \quad ||A(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq N_0,$$

assim $|f_n(t)| \leq 2MN_0$. Logo pelo teorema da convergência de Vitali[(2)], $\{f_n\}$ converge para 0 em L^1, isto é

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \text{Sup}_{y\in K}||(A^n - A)(r)y||_X dr = 0. \qquad \square$$

Portanto em (3.20)

$$||U(t,s)y - U^n(t,s)y||_X \leq C\int_s^t \text{Sup}_{y\in K}||(A(r) - A^n(r))y||_X dr \to 0$$

quando $n \to \infty$, e assim obtem-se (3.15). ∎

Uma conseqüência imediata do teorema anterior e de (3.3) é

Teorema 3.8. Além das hipóteses do teorema anterior, se $y^n \to y$ em X e $f^n \to f$ em $L^1([s,T],Y)$, então $u^n \to u$ em $C([s,T],X)$.

---

(2) Seja $\{f_n\}_{n\in N}$ uma seqüência em L^p, $1 \leq p < \infty$. Se $f_n \to f$ na medida, $g \in L^p$ e $|f_n| \leq g$, então $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [B, 76-78].

Capítulo 3

Equações de Evolução Lineares do Tipo Hiperbólico

Neste capítulo discutimos o *problema abstrato de Cauchy associado à equação de evolução quase linear do tipo hiperbólico*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t,u)u(t) + f(t,u) \quad \text{para} \quad 0 \le t \le T \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{Q}$$

num espaço de Banach X. Assumimos que para cada t e u, $A(t,u)$ é um operador linear em X que gera um C_0-semigrupo (não necessariamente analítico), $f : [0,T] \times X \to X$ é uma função dada e $u : [0,T] \to X$.

Nós apresentaremos dois teoremas devidos a Kato [K4], para (Q), um deles de existência e unicidade, e o outro sobre dependência contínua da solução no dado inicial. Estes resultados são locais. Em geral a continuação de soluções para $t > T$ é um problema difícil, e não o consideraremos neste trabalho.

3.1. Teorema de Existência e Unicidade.

O problema (Q) é diferente do problema (L), considerado no capítulo anterior, pelo fato de que A e f dependem explicitamente da solução u do problema. No entanto, a prova do teorema 1.3 está baseada na teoria para (L).

A idéia é simples. Consideramos um certo espaço métrico $\mathcal{E}$ de funções definidas em $[0,T]$ com valores em X, então para cada $v \in \mathcal{E}$ consideramos o problema linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A(t, v(t))u(t) + f(t, v(t)) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{L^v}$$

Da teoria linear obtemos uma única solução u^v de (L^v), e assim temos definida a função $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $\Phi(v) = u^v$. Provaremos então que $\mathcal{E}$ pode ser escolhido como um espaço métrico completo e Φ é uma contração. Logo, pelo *princípio da contração*, existe uma única $u \in \mathcal{E}$ tal que $\Phi(u) = u$ é a solução procurada para (Q).

Para seguir o programa acima descrito, temos que formular a seguinte hipótese para o espaço X.

X: Sejam X e Y dois espaços de Banach reflexivos tais que Y está densa e continuamente contido em X. Além disso, existe um isomorfismo $S : Y \to X$ e a norma de Y é escolhida de forma que S seja uma isometria.

Provamos agora a seguinte proposição.

Proposição 1.1. Se a função $g : [0,T] \to Y$ é limitada na norma de Y e contínua na norma de X, então g é fracamente contínua (e fortemente mensurável) como uma função com valores em Y.

Prova.
Seja $t_n \to t_0$ em $[0,T]$, então $g(t_n) \to g(t_0)$ em X e $||g(t_n)||_Y \leq C$ para todo $n \geq 1$. Assim existe uma subseqüência $t_{n_k} \to t_0$ e um $y \in Y$ tal que $g(t_{n_k}) \to y$ fracamente em Y. Mas $X' \subseteq Y'$, então $g(t_{n_k}) \to y$ fracamente em X. Portanto $y = g(t_0)$. Agora se $g(t_n)$ não converge fracamente em Y, então existe $y' \in Y$ e uma subseqüência $t_{n_k} \to t_0$ tal que

$$| < y', g(t_{n_k}) > - < y', g(t_0) > | \geq \mathcal{E}_0 > 0.$$

Assim temos uma contradição, pois uma subseqüência da subseqüência $\{g(t_{n_k})\}$ tem que convergir fracamente a $g(t_0)$. Portanto g é fracamente contínua em Y. Da discussão que segue à definição 1.1.7, temos que g é fortemente mensurável como função com valores em Y. ∎

Para o operador linear A e a função f temos as seguintes hipóteses.

A_1: Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$ temos que $A(t,w)$ gera um semigrupo de classe $C_0(1,\omega)$ em X, onde $W = B_r(y_0)$ é uma bola aberta em Y e ω é um número real, isto é

$$||e^{sA(t,w)}||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega s}, \qquad s \geq 0, \qquad (t,w) \in [0,T] \times W \tag{1.1}$$

A_2: Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$ temos

$$SA(t,w)S^{-1} = A(t,w) + B(t,w) \tag{1.2}$$

onde

$$B(t,w) \in \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad ||B(t,w)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda_1 \tag{1.3}$$

com $\lambda_1 > 0$ uma constante.

A_3: Para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$ temos $A(t,w) \in \mathcal{L}(Y,X)$. Além disso, para cada $w \in W$ a aplicação $t \in [0,T] \mapsto A(t,w)$ é contínua na norma de $\mathcal{L}(Y,X)$, e para $t \in [0,T]$ a aplicação $w \in W \mapsto A(t,W)$ é Lipschitz contínua, isto é

$$||A(t,w_1) - A(t,w_2)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \mu_1 ||w_1 - w_2||_X \tag{1.4}$$

onde μ_1 é uma constante.

A_4: Para todo $(t,w) \in [0,T] \times W$ temos que $A(t,w)y_0 \in Y$ e

$$||A(t,w)y_0||_Y \leq \lambda_2, \qquad t \in [0,T], \quad w \in W. \tag{1.5}$$

f_1: A função $f : [0,T] \times W \to X$ é limitada,

$$||f(t,w)||_X \leq \mu_1, \qquad t \in [0,T], \quad w \in W. \tag{1.6}$$

Para cada $w \in W$, $t \in [0,T] \mapsto f(t,w)$ é contínua de $[0,T]$ em X e para cada $t \in [0,T]$ a aplicação $w \in W \mapsto f(t,w)$ é Lipschitz em X, isto é

$$||f(t,w_1) - f(t,w_2)||_X \leq \mu_2 ||w_1 - w_2||_X \tag{1.7}$$

onde μ_1 é uma constante.

Temos então o teorema de existência e unicidade

Teorema 1.2. Suponhamos as hipóteses $X, A_1 - A_4$ e f_1 são satisfeitas. Se $u_0 \in W$ então existem $T_0 \in [0,T]$ e uma única

$$u \in C([0,T_0],Y) \cap C^1([0,T_0],X)$$

solução do problema (Q).

Prova.

Como W é uma bola aberta em Y, escolhemos $R > 0$ tal que $u_0 \in B_R(y_0)$ e $B_R[y_0] \subseteq W$. Consideramos o conjunto

$$\mathcal{E} = \{v : [0,T] \to Y \ / \ ||v(t) - y_0||_Y \leq R \quad \text{e} \quad v \in C([0,T_0],X)\} \tag{1.8}$$

onde $T_0 \in [0,T]$ será determinado adiante. Se $v \in \mathcal{E}$ definimos

$$A^v(t) = A(t, v(t)). \tag{1.9}$$

Devido à hipótese A_1, $A^v(t)$ gera em X o semigrupo $\{e^{sA^v(t)}\}_{s\geq 0}$ de classe $C_0(1,\omega)$. Portanto, da discussão que segue à definição 1.4.1, a família $\{A^v(t)\}_{t\in[0,T]}$ é estável com constantes de estabilidade $(1,\omega)$, isto é

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} e^{s_j A^v(t_j)}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp(\omega \sum_{j=1}^{n} s_j) \tag{1.10}$$

para toda seqüência finita $\{t_j\}_{j=1}^{n}$ com $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T$ e $s_j \geq 0$.

Afirmação 1. A função $t \in [0,T] \mapsto A^v(t)$ é contínua na norma de $\mathcal{L}(Y,X)$.

De fato.

Temos que $A^v(t) = A(t,v(t)) \in \mathcal{L}(Y,X)$ e se $t_0 \in [0,T_0]$

$$\begin{aligned}
||A^v(t) - A^v(t_0)||_{\mathcal{L}(Y,X)} &= ||A(t,v(t)) - A(t_0,v(t_0))||_{\mathcal{L}(Y,X)} \\
&\leq ||A(t,v(t)) - A(t,v(t_0))||_{\mathcal{L}(Y,X)} \\
&\quad + ||A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))||_{\mathcal{L}(Y,X)} \\
&\leq \mu_1 ||v(t) - v(t_0)||_X \\
&\quad + ||A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))||_{\mathcal{L}(Y,X)}
\end{aligned}$$

pois da hipótese A_3 a aplicação $A(t,\cdot)$ é de Lipschitz para cada $t \in (0,T_0]$. Além disso, a função $A(\cdot, v(t_0))$ é contínua. Logo, quando $t \to t_0$ temos

$$||A^v(t) - A^v(t_0)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \to 0$$

isto encerra a demonstração. □

Notemos que por A_2 temos

$$SA^v(t)S^{-1} = A^v(t) + B^v(t) \tag{1.11}$$

onde $B^v(t) = B(t,w) \in \mathcal{L}(X)$ e $||B^v(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda_1$.

Afirmação 2. A função $t \in [0,T] \mapsto B^v(t)$ é fracamente contínua (e portanto fortemente mensurável).

De fato.

Seja $y \in Y$. Então de (1.11)

$$A^v(t)S^{-1}y = S^{-1}A^v(t)y + S^{-1}B^v(t)y$$

como $S^{-1}y \in Y$ segue da afirmação 1 que o lado direito de

$$S^{-1}B^v(t)y = A^v(t)S^{-1}y - S^{-1}A^v(t)y$$

é contínuo na norma de X. Portanto $t \mapsto S^{-1}B^v(t)y$ é contínua na norma de X. Mais ainda

$$||S^{-1}B^v(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X)}||B^v(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda_1||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X)}.$$

Como Y é denso em X segue que $t \in [0,T_0] \mapsto S^{-1}B^v(t)x$ é contínua para todo $x \in X$. Além disso esta função é uniformemente limitada em Y. De fato,

$$||S^{-1}B^v(t)x||_Y = ||B^v(t)x||_X \leq \lambda_1||x||_X.$$

A proposição 1.1 implica então que

$$t \in [0,T_0] \mapsto S^{-1}B^v(t)x \in Y$$

é fracamente contínua. Em conseqüência $t \in [0,T_0] \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(X)$ é fracamente contínua. □

As afirmações 1 e 2 mostram que as hipóteses H_1, H_2^+ e H_3 do teorema 2.1.9 são satisfeitas. Existe portanto um único sistema de evolução $\{U^v(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ com as propriedades $E_1 - E_5$ dos teoremas 2.1.2 e 2.1.6.

Afirmação 3. Seja $f^v(t) = f(t, v(t))$. Então $||f^v(t)||_Y \leq \mu_1$ para todo $t \in [0,T]$ e $t \mapsto f(t, v(t))$ é contínua na norma de X e fracamente contínua (logo fortemente mensurável) como função a valores em Y.

De fato.

A desigualdade segue trivialmente de f_1. Além disso,

$$\begin{aligned} ||f^v(t) - f^v(t_0)||_X &\leq ||f(t, v(t)) - f(t, v(t_0))||_X \\ &\quad + ||f(t, v(t_0)) - f(t_0, v(t_0))||_X \\ &\leq \mu_2 ||v(t) - v(t_0)||_X \\ &\quad + ||f(t, v(t_0)) - f(t_0, v(t_0))||_X \end{aligned}$$

e a continuidade segue imediatamente. A última parte da afirmação é conseqüência das duas primeiras e da proposição 1.1. □

Devido à afirmação 3, podemos aplicar o teorema 2.2.5 para obter a única solução $u^v(t)$ do problema

$$\begin{cases} \partial_t u^v(t) = A^v(t)u^v(t) + f^v(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T \\ u^v(0) = u_0. \end{cases} \tag{L^v}$$

Ela é dada por

$$u^v(t) = U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr \tag{1.12}$$

e

$$u^v \in C([0,T_0], Y) \cap C^1([0,T_0], X) \tag{1.13}$$

uma vez que $u_0 \in Y$ e $f^v \in C([0,T_0], X) \cap L^\infty([0,T_0], Y)$.

Afirmação 4. Existe $T_0 \in [0,T]$ tal que a aplicação $v \in \mathcal{E} \mapsto \Phi(v) = u^v$ transforma $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}$.

De fato.

Devido a (1.13) temos que $u^v \in C([0,T_0],X)$ para todo $T_0 \in (0,T]$. Resta provar que existe T_0 tal que $u^v(t) \in B_R[y_0]$ qualquer que seja $t \in [0,T_0]$. Observemos que

$$\begin{aligned} u^v(t) - y_0 &= U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr - y_0 \\ &= U^v(t,0)(u_0 - y_0) + U^v(t,0)y_0 - y_0 \\ &\quad + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr. \end{aligned}$$

Mas $\{U^v(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ satisfaz E_3 do teorema 2.1.2, logo

$$\begin{aligned} U^v(t,0)y_0 - y_0 &= U^v(t,0)y_0 - U^v(t,t)y_0 = -\int_0^t \partial_r U^v(t,r)y_0 dr \\ &= \int_0^t U^v(t,r)A^v(r)y_0 dr. \end{aligned}$$

Portanto

$$u^v(t) - y_0 = U^v(t,0)(u_0 - y_0) + \int_0^t U^v(t,r)[f^v(r) + A^v(r)y_0]dr.$$

Como $||S||_{\mathcal{L}(Y,X)} = ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)} = 1$, da proposição 2.1.10, temos

$$||U^v(t,s)||_{\mathcal{L}(Y)} \leq \exp[(\omega + \lambda_1)T_0].$$

Além disso $||A^v(s)y_0||_Y \leq \lambda_2$ por A_4 e $||f^v(s)||_Y \leq \mu_1$ pela afirmação 3, portanto

$$\begin{aligned} ||u^v(t) - y_0||_Y &\leq ||U^v(t,0)(u_0 - y_0)||_Y \\ &\quad + \int_0^t ||U^v(t,r)[f^v(r) + A^v(r)y_0]||_Y dr \\ &\leq ||U^v(t,0)||_{\mathcal{L}(Y)}||u_0 - y_0||_Y \\ &\quad + \int_0^t ||U^v(t,r)||_{\mathcal{L}(Y)}[||f^v(r)|| + ||A^v(r)y_0||_Y]dr \\ &\leq e^{(\omega+\lambda_1)T_0}||u_0 - y_0||_Y + \int_0^t e^{(\omega+\lambda_1)T_0}[\mu_1 + \lambda_2]dr \\ &\leq e^{(\omega+\lambda_1)T_0}\Big[||u_0 - y_0||_Y + (\mu_1 + \lambda_2)T_0\Big]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Como $||u_0 - y_0||_Y < R$ é possível escolher $T_0 > 0$ tal que o lado direito de (1.14) seja menor que R, o que prova a afirmação. □

Agora se $v, w \in \mathcal{E}$ consideramos a métrica

$$d(v,w) = \mathrm{Sup}_{0\leq t\leq T_0}||v(t) - w(t)||_X.$$

Afirmação 5. $(\mathcal{E}, d)$ é um espaço métrico completo.

De fato.

Suponhamos que $\{v_n\}_{n\in I\!N}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{E}$, então existe $v \in C([0,T_0],X)$ tal que $||v_n(t) - v(t)||_X \to 0$ uniformemente em $[0,T_0]$. Além disso

$$||v_n(t)||_Y \leq ||v_n(t) - y_0||_Y + ||y_0||_Y \leq R + ||y_0||_Y$$

para todo $n \in I\!N$ e $t \in [0,T_0]$. Fixando $t \in [0,T_0]$, da reflexividade de Y[(1)] existe $y \in Y$ e uma subseqüência $\{v_{n_k}(t)\}$ tal que

$$v_{n_k}(t) \rightharpoonup y \quad \text{fracamente em} \quad Y.$$

Mas $X' \subseteq Y'$, assim

$$v_{n_k}(t) \rightharpoonup y \quad \text{fracamente em} \quad X.$$

Portanto $y = v(t)$ e $v_{n_k}(t) \rightharpoonup v$ fracamente em Y. Como $B_R[y_0]$ é um conjunto convexo e fechado em Y, é fracamente fechado. Portanto $v(t) \in B_R[y_0]$. Como $t \in [0,T_0]$ foi arbitrário, temos $v \in \mathcal{E}$. Assim $\mathcal{E}$ é completo. □

Afirmação 6. Existe $T_0 \in [0,T]$ tal que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é uma contração.

De fato.

Utilizando as equações

$$[\Phi(v)](t) = u^v(t) = U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr$$

e

$$[\Phi(w)](t) = u^w(t) = U^w(t,0)u_0 + \int_0^t U^w(t,r)f^w(r)dr$$

temos que

$$\begin{aligned} u^v(t) - u^w(t) &= \Big[U^v(t,0) - U^w(t,0)\Big]u_0 + \int_0^t U^v(t,r)[f^v(r) - f^w(r)]dr \\ &\quad + \int_0^t [U^v(t,r) - U^w(t,r)]f^w(r)dr. \end{aligned} \tag{1.15}$$

(1) Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}$ uma seqüência limitada em E. Então existe uma subseqüência de $\{x_n\}$ que converge na topologia $\sigma(E,E')$. [Brézis, pág. 50].

Mas

$$\partial_r U^v(t,r)U^w(r,s)u_0 = U^v(t,r)[A^w(r) - A^v(r)]U^w(r,s)u_0$$

então integrando de s até t

$$U^v(t,s)u_0 - U^w(t,s)u_0 = \int_s^t U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,s)u_0 dr.$$

Logo

$$U^v(t,0)u_0 - U^w(t,0)u_0 = \int_0^t U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,0)u_0 dr. \tag{1.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t [U^v(t,s)u_0 - U^w(t,s)u_0]f^w(s)ds \\
&= \int_0^t \int_s^t U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,s)f^w(s)drds \\
&= \int_0^t \int_0^s U^v(t,s)[A^v(s) - A^w(s)]U^w(s,r)f^w(r)drds.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Substituindo (1.16) e (1.17) em (1.15) temos

$$U^v(t) - u^w(t) = \int_0^t U^v(t,s)\Big[(A^v(s) - A^w(s))u^w(s) + f^v(s) - f^w(s)\Big]ds.$$

Como $||U^v(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega T_0}$ segue de (1.16) que

$$d(u^v, u^w) \leq e^{\omega T_0}\Big[||f^v - f^w||_{1,X} + ||(A^v - A^w)u^w||_{1,X}\Big]. \tag{1.18}$$

Mas por f_1 temos que $||f^v(t) - f^w(t)||_X \leq \mu_2||v(t) - w(t)||_X$ e assim

$$||f^v - f^w||_{1,X} \leq \mu_2 T_0 d(v,w).$$

Além disso

$$\begin{aligned}
||(A^v(t) - A^w(t))u^w(t)||_X &\leq ||A^v(t) - A^w(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)}||u^w(t)||_Y \\
&\leq \mu_1 d(v,w)T_0(||u_0||_Y + R),
\end{aligned}$$

portanto,

$$||(A^v - A^w)u^w||_{1,X} \leq \mu_1 d(v,w)T_0(||u_0||_Y + R).$$

Substituindo em (1.18),

$$d(u^v, u^w) \leq T_0 e^{\omega T_0}\Big[\mu_2 + \mu_1||y_0||_Y + \mu_1 R\Big]d(v,w) \tag{1.19}$$

e a afirmação está provada. $\square$

Aplicando o *Princípio da Contração* (ver [KF]) a $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ obtemos que existe uma única u tal que $\Phi(u) = u$, isto é,

$$\begin{aligned} u(t) = \Phi(u)(t) &= U^u(t,0)u_0 + \int_0^t U^u(t,r)f^u(r)dr \\ &= U^u(t,0)u_0 + \int_0^t U^u(t,r)f(r,u(r))dr \end{aligned}$$

que é a solução procurada. $\blacksquare$

3.2. Dependência Contínua.

Para demonstrar a dependência contínua da solução u do problema (Q), no dado inicial u_0, vamos considerar a seqüência de problemas

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) = A_n(t,u_n)u_n(t) + f_n(t,u_n) & \text{para} \quad 0 \le t \le T \\ u_n(0) = u_n^0 \end{cases} \qquad (\mathrm{Q}^n)$$

onde $n \in I\!N$.

Além das hipóteses $A_1 - A_4$ e f_1, com os mesmos X, Y, S e W assumimos também:

A_5: Existe $\mu_3 > 0$ tal que

$$||B_n(t,w_1) - B_n(t,w_2)||_{\mathcal{L}(X)} \le \mu_3 ||w_1 - w_2||_X$$

para todo $t \in [0,T]$ e $w_1, w_2 \in W$.

f_2: Existe $\mu_4 > 0$ tal que

$$||f_n(t,w_1) - f_n(t,w_2)||_Y \le \mu_2 ||w_1 - w_2||_Y$$

para todo $t \in [0,T]$ e $w_1, w_2 \in W$.

Assim temos,

Teorema 2.1. Suponhamos que (Q^n) satisfaz as hipóteses $X, A_1 - A_5, f_1$ e f_2 uniformemente[2] em $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos também que para cada $(t,w) \in [0,T] \times W$

$$A_n(t,w) \xrightarrow{s} A(t,w) \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(Y,X) \tag{2.1}$$

$$B_n(t,w) \xrightarrow{s} B(t,w) \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(X) \tag{2.2}$$

$$f_n(t,w) \xrightarrow{s} f(t,w) \quad \text{em} \quad Y \tag{2.3}$$

quando $n \to \infty$. Então se $u_0, u_n^0 \in W$ e $u_n^0 \to u_0$ em Y quando $n \to \infty$, existe $T_1 \in (0,T]$ tal que existem soluções únicas

$$\begin{cases} u_n \in C([0,T_1],Y) \cap C^1([0,T_1],X) \\ u_n(0) = u_n^0 \end{cases} \tag{2.4}$$

para (Q^n), e uma única solução $u \in C([0,T_1],Y) \cap C^1([0,T_1],X)$ para (Q) e

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{em} \quad Y, \quad \text{uniformemente em} \quad t \in [0,T_1] \tag{2.5}$$

Prova.

Como na prova do teorema 1.3 consideramos o conjunto

$$\mathcal{E} = \{v : [0,T] \to Y \ / \ ||v(t) - y_0||_Y \leq R \quad \text{e} \quad v \in C([0,T_0],X)\}.$$

Para cada $v \in \mathcal{E}$ consideramos a seqüência de problemas lineares

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) = A_n^v(t)u_n(t) + f_n^v(t), \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T_0 \\ u_n(0) = u_n^0 \end{cases} \tag{L_n^v}$$

onde $A_n^v(t) = A_n(t, v(t))$ e $f_n^v(t) = f_n(t, v(t))$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe[3] uma única solução u_n do problema (L_n^v) definida em $[0,T_0]$ e $u_n \in \mathcal{E}$ se T_0 é bastante pequeno. Assim, a função $\Phi_n : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida por $\Phi_n(v) = u_n$ é uma contração, e o ponto fixo correspondente é a solução de (Q^n).

---

[2] Isto quer dizer que todas as constantes ω, $\lambda_1, \ldots, \mu_4$ independem de $n \in \mathbb{N}$.

[3] Para cada $n \in \mathbb{N}$ procedemos como na prova do teorema 1.3.

Da uniformidade das hipóteses e as relações (1.14) e (1.19), é fácil verificar que a escolha de T_0 e o fator de contração $\gamma < 1$ de Φ_n independem de n, e portanto serão considerados iguais. Além disso, sem perda de generalidade, vamos supor que o tempo de existência da solução e o fator de contração para (Q) são também T_0 e γ.

Afirmação 1. $||u_n(t) - u(t)||_X \to 0$ uniformemente para $t \in [0, T_0]$.

De fato.

Como $\Phi_n(u_n) = u_n$ e $\Phi(u) = u$ temos

$$\mathrm{Sup}_{0\leq t\leq T_0}||u_n(t) - u(t)||_X = d(u_n, u)$$

e

$$\begin{aligned} d(u_n, u) &= d(\Phi_n(u_n), \Phi(u)) \\ &\leq d(\Phi_n(u_n), \Phi(u)) + d(\Phi_n(u), \Phi(u)) \\ &\leq \gamma d(u_n, u) + d(\Phi_n(u), \Phi(u)). \end{aligned}$$

Então

$$(1-\gamma)d(u_n, u) \leq d(\Phi_n(u), \Phi(u))$$

isto é

$$\mathrm{Sup}_{0\leq t\leq T_0}||u_n(t) - u(t)||_X \leq \frac{1}{1-\gamma} d(\Phi_n, (u), \Phi(u)). \tag{2.6}$$

Mostremos que $\lim_{n\to\infty} d(\Phi_n(v), \Phi_n(v)) = 0$ para todo $v \in \mathcal{E}$. De fato, consideramos o problema linear

$$\begin{cases} \partial_t u^v(t) = A^v(t)u^v(t) + f^v(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T_0 \\ \\ u^v(0) = u_0 \end{cases} \tag{L^v}$$

das hipóteses $u_n^0 \to u_0$ em X,

$$A_n^v(t) - A^v(t) = A_n(t, v(t)) - A(t, v(t)) \stackrel{s}{\longrightarrow} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(Y, X)$$

e

$$f_n^v(t) - f^v(t) = f_n(t, v(t)) - f(t, v(t)) \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad Y.$$

Além disso, como $||A_n(T,w)||_{\mathcal{L}(Y,X)}$ é fortemente limtiada em t, w e n, temos

$$\lim_{m(E)\to 0}\int_E ||A_n^v(t)||_{\mathcal{L}(Y,X)}dt = 0$$

uniformemente em n. Então aplicando o teorema 2.3.7 temos que a solução v_n de (L_n^v), é tal que $v_n \to v$ em $C([0,T_0],X)$ quando $n \to \infty$. Assim em (2.6)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sup}_{0\leq t\leq T_0}||u_n(t) - u(t)||_X = 0.$$

□

Como u_n é a solução de

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) = A_n^{u_n}(t)u_n(t) + f_n^{u_n}(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T_0 \\ \\ u_n(0) = u_n^0 \end{cases} \tag{L_n}$$

temos pelo teorema 2.3.4

$$||u_n - u||_{\infty,Y} \leq K'[||u_n^0 - u_0||_Y + ||f_n - f||_{1,Y} + ||(B_n - B)Su||_{1,X} + ||h||_{\infty,X}] \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{array}{ll} f_n(t) = f_n(t,u_n(t)), & B_n(t) = B_n(t,u_n(t)), \\ f(t) = f(t,u_n(t)), & B(t) = B(t,u(t)), \end{array}$$

e

$$\begin{cases} h_n(t) = [UW_n(t,s) - U(t,0)]Su_0 + \int_0^t [U_n(t,s) - U(t,s)]g(s)ds \\ \\ g(t) = Sf(t) - B(t)Su(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

onde U_n e U são os operadores de evolução para (L_n) e (L^v) respectivamente, e K' uma constante que depende de R e T_0 mas não de n. Da hipótese f_2 temos que

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_{1,Y} &= \int_0^{T_0} ||f_n(t,u_n(t)) - f(t,u(t))||_Y dt \\ &\leq \mu_4 T_0||u_n - u||_{\infty,Y} + \int_0^{T_0} ||(f_n - f)(t,u(t))||_Y dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Além disso de f_2, A_5 e $||Su(t)||_X \leq ||u(t)|| \leq ||y_0||_Y + R$, temos

$$||(B_n - B)Su||_{1,X} \leq \int_0^T ||[B_n(t,u_n(t)) - B(t,u(t))]Su(t)||_X dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_3 \int_0^{T_0} ||u_n(t) - u(t)||_Y ||Su(t)||_X dt \\
&\quad + \int_0^{T_0} ||(B_n - B)(t, u(t))Su(t)||_X dt \\
&\leq \mu_3 T_0 ||u_n - u||_{\infty,Y} (||y_0||_Y + R) \\
&\quad + \int_0^{T_0} ||(B_n - B)(t, u(t))Su(t)||_X dt. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Assim de (2.9) e (2.10)

$$\begin{aligned}
||f_n - f||_{1,Y} + ||(B_n - B)Su||_{1,X} &\leq [\mu_4 + \mu_3(||y_0||_Y + R)]T_0 ||u_n - u||_{\infty,Y} \\
&\quad + \int_0^{T_0} ||(f_n - f)(t, u(t))||_Y dt \\
&\quad + \int_0^{T_0} ||(B_n - B)(t, u(t))Su(t)||_X dt.
\end{aligned}$$

Escolhendo T_1 suficientemente pequeno tal que

$$K'\alpha = K'[\mu_4 + \mu_3(||y_0||_Y + R)]T_1 < 1,$$

temos em (2.7),

$$\begin{aligned}
0 \leq (1 - K'\alpha)||u_n - u||_{\infty,Y} &\leq K'[||u_n^0 - u_0||_Y + \int_0^{T_1} ||(f_n - f)(t, u(t))||_Y dt \\
&\quad + \int_0^{T_1} ||(B_n - B)(t, u(t))Su(t)||_X dt \\
&\quad + ||h||_{\infty,X}]. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Mas quando $n \to \infty$ temos $||u_n^0 - u_0||_Y \to 0$ por hipótese, e por (2.3)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_1} ||(f_n - f)(t, u(t))||_Y dt = 0.$$

Além disso, de (2.2) e o teorema de convergência dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T_1} ||(B_n - B)(t, u(t))Su(t)||_X dt = 0.$$

Afirmação 2. $||h||_{\infty,X} \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato.

Por (2.4) é suficiente mostrar que se $n \to \infty$, então

$$U_n(t,s) - U(t,s) \xrightarrow{s} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(X) \qquad (2.12)$$

uniformemente em $(t,s) \in \Delta$.
Notemos que $g \in L^\infty([0,T],X)$. Como

$$A_n(t,u_n(t)) - A(t,u(t)) = [A_n(t,u_n(t)) - A_n(t,u(t))] + [A_n(t,u(t)) - A(t,u(t))]$$

temos que

$$A_n(t,u_n(t)) - A(t,u(t)) \xrightarrow{s} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(X)$$

pois da hipótese A_3 e da afirmação 1

$$||A_n(t,u_n(t)) - A_n(t,u(t))||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \mu_1 ||u_n(t) - u(t)||_X \to 0$$

uniformemente para $t \in [0,T_1]$, e de (2.1) temos

$$A_n(t,u(t)) - A(t,u(t)) \xrightarrow{s} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(Y,X).$$

Então pelo teorema 2.3.7 obtemos (2.12). □

Portanto em (2.11)

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{\infty,Y} = 0$$

o que completa a prova. ■

Na verdade o teorema 2.1 é muito mais geral pois engloba tanto o dado inicial quanto os coeficientes da equação.

3.3. Comentários.

1. Na hipótese (X), o fato que os espaços X e Y sejam reflexivos é muito restritivo. Mas esta propriedade dos espaços X e Y é fundamental na prova de que o espaço de funções $\mathcal{E}$ é completo.
   Em [KS] e [S3], Kobayasi e Sanekata eliminaram a condição de reflexidade imposta aos espaços X e Y. No entanto eles ainda utilizam o operador S.
   Em [K9] Kato, não somente elimina a reflexidade, também consegue relaxar as

condições impostas a S. Em lugar do isomorfismo de Y em X, ele usa um operador linear fechado U de X a um terceiro espaço de Banach Z tal que $\mathcal{D}(U) = Y$, e substitui

$$UA(t,y)U^{-1} = A(t,y) + B(t,y), \qquad B(t,y) \in \mathcal{L}(X)$$

por outro tipo de condição.

2. Nos teoremas 1.2 e 2.1 as hipóteses são mecanicamente verificáveis, exceto a condição A_1. Ela impõe que $\{A(t,y)\}_{(t,y)\in[0,T]\times W}$ seja uma família de geradores de semigrupos de classe $C_0(1,\omega)$, com a finalidade de tornar a condição de estabilidade da família mais trivial (veja o cometário após da definição 1.4.1). Lembremos que em geral não é fácil mostrar que uma família dada é estável.

3. Para verificar a condição A_1 nós podemos utilizar, por exemplo, as proposições 4.0.2 ou 4.0.3, ou também o Teorema de Lumer-Phillips que enunciamos a seguir.
   Teorema de Lumer-Phillips. Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso no espaço de Hilbert X. Se A é dissipativo (veja a definição 4.0.1) e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações.
   O teorema anterior é também válido (com o mesmo enunciado) se X é um espaço de Banach, mas nesse caso temos que mudar a definição 4.0.1.

4. A hipótese A_4 é trivialmente satisfeita se $y_0 = 0$.

Capítulo 4

Aplicação à Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Neste capítulo vamos a considerar o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries generalizada, e provaremos que é um problema localmente bem posto no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq 3$, supondo que o dado inicial pertence ao mesmo espaço.

Vejamos antes algumas definições e proposições a serem utilizadas no capítulo (as demonstrações podem ser vistas em [P]). Vamos supor que X é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$.

Definição 0.1. O operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ é dissipativo se para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ temos que $Re(Ax, x) \leq 0$.

Proposição 0.2. Seja A o gerador de um C_0-semigrupo de constrações em X. Se B é dissipativo e satisfaz $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ e

$$||Bx|| \leq \alpha ||Ax|| + \beta ||x|| \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{D}(A) \tag{0.1}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $\beta \geq 0$. Então $A + B$ gera um C_0-semigrupo de contrações.

A condição (0.1) diz que o operador B é A-limitado.

Proposição 0.3. Se iA é um operador auto-adjunto, então A gera um C_0-semigrupo de contrações.

Finalmente lembremos as seguintes propriedades para os espaços de Sobolev H^s.

Proposição 0.4.
1. Para $s \leq t$, $H^t(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ e $||u||_s \leq ||u||_t$ para $u \in H^t(\mathbb{R})$.
2. Se $s > 1/2$ então $H^s(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ e para $u \in H^s(\mathbb{R})$

$$||u||_\infty \leq C||u||_s$$

onde $||u||_\infty = \mathrm{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|u(x)|$.

Denotaremos por $\int$ a integral sobre todo $\mathbb{R}$, e o produto interno e a norma em $H^s(\mathbb{R})$ por $(\cdot,\cdot)_s$ e $||\cdot||_s$ respectivamente.

4.1. Equação Generalizada de Korteweg-de Vries em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$.

Nesta seção consideramos o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries generalizada

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + a(u)u_x = 0 \quad \text{para} \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{G}$$

na qual $a \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Todas as funções são assumidas com valores nos reais.

Como foi dito, vamos mostrar que o problema (G) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$ onde $s \geq 3$ é um número real fixo. Para isto é suficiente verificar as hipóteses dos teoremas 3.1.2 e 3.2.1.

Hipótese X.

Sejam $X = L^2(I\!R)$ com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $||\cdot||$, e seja $Y = H^s(I\!R)$, onde $s \geq 3$ é um número real fixo. Sabemos que Y está densa e continuamente contido em X.

Definimos S em Y por

$$Su(x) = [(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)]^{\vee}(x), \quad \text{para} \quad u \in Y.$$

Proposição 1.1. $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ é um isomorfismo isométrico.

Prova.

Para cada $u \in Y$ temos que $(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi) \in X$, e como a transformada de Fourier é um operador unitário de X em X, temos que

$$Su = [(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)]^{\vee} \in X$$

assim $\mathcal{R}(S) \subseteq X$. Além disso, por Plancherel

$$||Su||^2 = ||(Su)^{\wedge}||^2 = \int (1+\xi^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = ||u||_s^2.$$

Logo $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ é uma isometria (em conseqüência injetivo), com imagem $\mathcal{R}(S)$ fechada. Vejamos que S é sobrejetivo. Com este fim notemos que se $v \in C_0^\infty(I\!R)$ então

$$Su = v \Leftrightarrow (1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi) \Leftrightarrow \widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{v}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}}.$$

Também

$$\int (1+\xi^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = ||\widehat{v}||^2 = ||v||^2.$$

Assim $u \in H^s(I\!R)$ e $Su = v$. Portanto $C_0^\infty(I\!R) \subseteq \mathcal{R}(S)$. Logo tomando o fecho em X

$$X = \overline{C_0^\infty(I\!R)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(S)} \subseteq \overline{X} = X$$

temos que $\mathcal{R}(S) = \overline{\mathcal{R}(S)} = X$. ∎

Isto prova a hipótese X.

Hipótese A_1.

Escolhido $u_0 \in H^s(I\!R)$, seja $R > ||u_0||_s$ um número real fixo e consideremos a bola

$$W = B_R[0] = \{v \in H^s(I\!R) : ||v||_s \leq R\}.$$

Definimos o operador A_0 por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_0) = H^3(I\!R) \\ A_0 u = -\partial_x^3 u \quad \text{para} \quad u \in \mathcal{D}(A_0). \end{cases}$$

Temos então a seguinte proposição.

Proposição 1.2. A_0 é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações em X.

Prova.

Temos que $(A_0 u, u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{D}(A_0)$ pois

$$(A_0 u, u) = -\int \partial_x^3 u.u dx = \int u.\partial_x^3 u dx = -\int u(-\partial_x^3 u) dx = -(A_0 u, u).$$

Da proposição 0.3, obtemos que A_0 gera um C_0-semigrupo de contrações em X. ∎

Antes de continuar com a verificação da hipótese A_1, observemos que $\partial_x a(y)(x)$ é contínua pois $a \in C^\infty(I\!R, I\!R)$, e limitada se $y \in W$. De fato, notemos primeiro que $\partial_x y \in H^{s-1}(I\!R)$ pois $y \in Y$, e como $s \geq 3$ segue da proposição 0.4. que $\partial_x y \in L^\infty(I\!R)$ e

$$||\partial_x y||_\infty \leq K||\partial_x y||_{s-1} \leq K||y||_s \leq KR$$

pois

$$\begin{aligned} ||\partial_x y||_{s-1}^2 &= \int (1+\xi^2)^{s-1} |(\partial_x y)^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \int (1+\xi^2)^{s-1} \xi^2 |\widehat{y}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int (1+\xi^2)^s |\widehat{y}(\xi)|^2 d\xi = ||y||_s^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} ||\partial_x a||_{L^\infty} &= \mathrm{Sup}_{x\in \mathbf{R}} |\partial_x a(y)(x)| = \mathrm{Sup}_{x\in\mathbf{R}} |\partial_x a(y(x)) \partial_x y(x)| \\ &\leq ||\partial_x y||_\infty \mathrm{Sup}_{x\in\mathbf{R}} |\partial_x a(y(x))| \leq \alpha K R \end{aligned}$$

onde $\alpha = \text{Sup}_{x\in \mathbb{R}}|\partial_x a(y(x))| < \infty$.

Para cada $y \in Y$, definimos o operador linear $A_1(y)$ por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_1(y)) = H^1(\mathbb{R}) \\ A_1(y)u = -a(y)\partial_x u \quad \text{para} \quad u \in \mathcal{D}(A_1(y)). \end{cases}$$

Vamos provar as seguintes proposições.

Proposição 1.3. Para cada $y \in W$, $A_1(y) - \omega I$ é dissipativo para todo $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$, onde K é uma constante que não depende de $y \in Y$.

Prova.

Para todo $u \in H^1(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned} (A_1(y)u, u) &= -\int a(y)\partial_x u.udx = -\frac{1}{2}\int a(y)\partial_x u^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int \partial_x a(y).u^2 dx \leq \frac{1}{2}||\partial_x a||_{L^\infty}\int u^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha K R||u||^2. \end{aligned}$$

Além disso, se $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$ temos

$$((A_1(y) - \omega I)u, u) = (A_1(y)u, u) - \omega||u||^2 \leq (\frac{1}{2}\alpha K R - \omega)||u||^2 \leq 0.$$

Portanto $A_1(y) - \omega I$ é dissipativo para todo $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$. ∎

Proposição 1.4. Se $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$, então $A_1(y) - \omega I$ é A_0 limitado.

Prova.

Para todo $u \in Y$ temos

$$\begin{aligned} ||(A_1(y) - \omega I)u|| &\leq ||a(y)\partial_X u|| + ||\omega u|| \\ &\leq ||a(y)||_\infty||\partial_X u|| + \omega||u||. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos

$$||\partial_x u|| \leq M||\partial_x^3 u||^{1/3}||u||^{2/3}.$$

Logo da desigualdade de Young, para todo $\varepsilon > 0$

$$||\partial_x u|| \leq \varepsilon||\partial_x^3 u|| + C(\varepsilon)||u||.$$

Tomamos $\varepsilon = \dfrac{1}{2||a(y)||_\infty}$ e substituimos em (1.1), logo

$$||(A_1(y) - \omega I)u|| \leq \frac{1}{2}||A_0 u|| + C||u|| \quad \text{para todo} \quad u \in \mathcal{D}(A_0)$$

o que prova a proposição. ■

Definimos o operador A por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = Y \\ A(y) = A_0 + A_1(y) \quad \text{para} \quad y \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Notemos que para cada $y \in Y$, $\mathcal{D}(A(y)) = H^3(I\!R)$ e $A(y)u = -\partial_x^3 u - a(y)\partial_x u$.

Temos a seguinte proposição, a qual prova a hipótese A_1.

Proposição 1.5. $\{A(y)\}_{y \in W}$ é uma família de operadores lineares em X que geram semigrupos de classe $C_0(1,\omega)$, onde $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$.

Prova.

Das proposições 1.4, 1.5, e pela proposição 0.2, temos que o operador $A(y) - \omega I$ gera um semigrupo de classe C_0 de contrações para todo $\omega \geq \frac{1}{2}\alpha K R$. Assim[(1)] $A(y)$ gera um $C_0(1,\omega)$-semigrupo em X. ■

Hipótese A_2.

Seja $\mathcal{S}(I\!R)$ o espaço se Schwartz das funções em $I\!R$ rapidamente decrescentes no infinito.

Notemos que se $u \in \mathcal{S}(I\!R)$ então $Su \in \mathcal{S}(I\!R)$ e

$$\partial_x^k S u = S\partial_x^k u \quad \text{para} \quad u \in \mathcal{S}(I\!R) \quad \text{e} \quad k \in I\!N \tag{1.2}$$

[(1)] Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um $C_0(M,0)$-semigrupo em X com gerador $A - \beta I$, então $\{T(t) = e^{\beta t}S(t)\}_{t\geq 0}$ é um $C_0(M,\beta)$-semigrupo em X com gerador A. A recíproca também vale.

Agora seja $\mathcal{M}_a$ o operador de multiplicação por a, isto é

$$\mathcal{M}_a u(x) = a(y(x))u(x)$$

onde $y \in W$ é arbitrário. Temos que $\mathcal{M}_a \in \mathcal{L}(Y)$, a prova pode ser encontrada em [H].

Usando $\mathcal{M}_a$ podemos escrever

$$A(y) = -\partial_x^3 - \mathcal{M}_a \partial_x.$$

Logo se $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$ temos por (1.2) que

$$[SA(y) - A(y)S]u = [S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S](-\partial_x u). \tag{1.3}$$

Provamos a seguinte estimativa

Proposição 1.6. Para todo $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$

$$||(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u|| \leq Cs||a||_s||u||_{s-1}$$

Prova.

Seja $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$ e denotemos $a(x) = a(y(x))$. Então

$$[(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u]^\wedge(\xi) = (1+\xi^2)^{s/2}(\mathcal{M}_a u)^\wedge(\xi) - [(\mathcal{M}_a S)u]^\wedge(\xi).$$

Mas $(\mathcal{M}_a \varphi)^\wedge(\xi) = (\hat{a} * \hat{\varphi})(\xi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(I\!\!R)$, logo

$$\begin{aligned} [(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u]^\wedge(\xi) &= (1+\xi^2)^{s/2}(\hat{a} * \hat{\varphi})(\xi) - [\hat{a} * (Su)^\wedge](\xi) \\ &= \int [(1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2}]\hat{a}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pelo teorema do valor médio temos

$$|(1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2}| = s(1+\theta^2)^{s/2}|\theta| \; |\xi-\eta|$$

onde θ pertence ao intervalo de extremos ξ e η. Assim

$$|(1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2}| \leq s(1+\theta^2)^{(s-1)/2}|\xi-\eta|$$

donde

$$|(1+\xi^2)^{s/2} - (1+\eta^2)^{s/2}| \leq s[(1+\xi^2)^{(s-1)/2} - (1+\eta^2)^{(s-1)/2}]|\xi-\eta|. \tag{1.5}$$

Portanto de (1.4) e (1.5) obtemos

$$\begin{aligned}
|[(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u]^\wedge(\xi)| &\leq s\int(1+\xi^2)^{(s-1)/2}|\xi-\eta||\widehat{a}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta \\
&+ s\int(1+\eta^2)^{(s-1)/2}|\xi-\eta||\widehat{a}(\xi-\eta)||\widehat{u}(\eta)|d\eta.
\end{aligned}$$

Seja g tal que $\widehat{g}(\xi) = |\xi||\widehat{a}(\xi)|$, então

$$\begin{aligned}
|[(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u]^\wedge(\xi)| &\leq s\int(1+\xi^2)^{(s-1)/2}\widehat{g}(\xi-\eta)|\widehat{u}(\eta)|d\eta \\
&+ s\int(1+\eta^2)^{(s-1)/2}\widehat{g}(\xi-\eta)|\widehat{u}(\eta)|d\eta \\
&= sI_1(\xi) + sI_2(\xi). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Seja f_1 tal que $\widehat{f_1}(\xi) = |\widehat{u}(\xi)|$, então

$$\begin{aligned}
I_1(\xi) &= (1+\xi^2)^{(s-1)/2}\int \widehat{g}(\xi-\eta)\widehat{f_1}(\xi)d\eta \\
&= (1+\xi^2)^{(s-1)/2}(\widehat{g} * \widehat{f_1}) = (1+\xi^2)^{(s-1)/2}(gf_1)^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

Logo

$$||I_1||^2 = \int(1+\xi^2)^{s-1}|(gf_1)^\wedge(\xi)|^2 d\xi = ||gf_1||_{s-1}^2 \leq C^2||g||_{s-1}^2||f_1||_{s-1}^2$$

pois $s - 1 \geq 2$. Mas,

$$||f_1||_{s-1}^2 = \int(1+\xi^2)^{s-1}|\widehat{f_1}(\xi)|^2 d\xi = \int(1+\xi^2)^{s-1}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = ||u||_{s-1}^2$$

e também

$$||g||_{s-1}^2 = \int(1+\xi^2)^{s-1}|\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq \int(1+\xi^2)^{s}|\widehat{a}(\xi)|^2 d\xi = ||a||_s^2.$$

Portanto,

$$||I_1|| \leq C||a||_s||u||_{s-1}. \qquad (1.7)$$

Agora seja f_2 tal que $\widehat{f_2}(\xi) = (1+\xi^2)^{(s-1)/2}|\widehat{u}(\xi)|$, então

$$I_2(\xi) = \int \widehat{g}(\xi-\eta)\widehat{f_2}(\eta)d\eta = (\widehat{g} * \widehat{f_2})(\xi).$$

Assim, da desigualdade de Young

$$||I_2|| = ||\widehat{g} * \widehat{f_2}|| \leq ||\widehat{g}||_{L^1(\mathbb{R})}||\widehat{f_2}||$$

onde

$$\hat{f}_2(\xi) = \int (1+\xi^2)^{s-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = ||u||_{s-1}^2$$

e

$$\begin{aligned}||\hat{g}||_{L^1(\mathbb{R})} &= \int |\hat{g}(\xi)|d\xi = \int |\xi||\hat{a}(\xi)|d\xi = \int |\xi|\frac{(1+\xi^2)^{1/2}}{(1+\xi^2)^{1/2}}|\hat{a}(\xi)|d\xi \\ &\leq \Big(\int \xi^2(1+\xi^2)|\hat{a}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int \frac{1}{1+\xi^2}d\xi\Big)^{1/2} \leq \pi||a||_2.\end{aligned}$$

Logo

$$||I_2|| \leq \pi||a||_2||u||_{s-1} \leq \pi||a||_s||u||_{s-1}. \tag{1.8}$$

De (1.6), (1.7) e (1.8) obtemos

$$||(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u|| = ||[(S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S)u]^\wedge|| \leq sC||a||_s||u||_{s-1}. \qquad \blacksquare$$

Portanto de (1.3) e a proposição 1.6, obtemos

$$\begin{aligned}||[SA(y) - A(y)S]u|| &= ||[S\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a S](-\partial_x u)|| \\ &\leq sC||a||_s||\partial_x u||_{s-1} \leq sC||a||_s||u||_s\end{aligned}$$

para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Agora, para cada $y \in W$, definimos o operador linear $\tilde{B}(y)$ por

$$\begin{cases}\mathcal{D}(\tilde{B}(y) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \tilde{B}(y)u = (SA(y) - A(y)S)S^{-1}u \quad \text{para} \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).\end{cases} \tag{1.9}$$

Então para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos que

$$||\tilde{B}(y)u|| \leq sC||a||_s||S^{-1}u||_s \leq sC||a||_s||u||. \tag{1.10}$$

Assim $\tilde{B}(y)$ é um operador linear limitado. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em X, extendemos $\tilde{B}(y)$ a X por continuidade e obtemos o operador linear $B(y)$ tal que

$$B(y) \in \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad ||B(y)||_{\mathcal{L}(X)} \leq sC||a||_s = \lambda_1 \quad \text{para} \quad y \in W. \tag{1.11}$$

Vejamos agora a seguinte proposição

Proposição 1.7. Para cada $y \in W$ temos que $\mathcal{D}(SA(y)S^{-1}) = \mathcal{D}(A(y))$ e

$$SA(y)S^{-1} = A(y) + B(y)$$

Prova.

Seja $y \in W$, $u \in \mathcal{D}(A(y)) = H^3(\mathbb{R})$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $H^3(\mathbb{R})$. Então por (1.9)

$$A(y)S^{-1}u_n = S^{-1}[A(y)u_n + \tilde{B}(y)u_n]$$

e como $B(y)u = \lim_{n\to\infty} \tilde{B}(y)u_n$ obtemos que

$$A(y)S^{-1}u_n \xrightarrow{X} S^{-1}[A(y)u + B(y)u] \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado $\lim_{n\to\infty} S^{-1}u_n = S^{-1}u$ em X, e como $A(y)$ é um operador fechado temos que $S^{-1}u \in \mathcal{D}(A(y))$ e

$$A(y)S^{-1}u_n \xrightarrow{X} A(y)S^{-1}u \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo

$$A(y)S^{-1}u = S^{-1}[A(y)u + B(y)u] \in H^s(\mathbb{R}).$$

Portanto $u \in \mathcal{D}(SA(y)S^{-1})$ e

$$SA(y)S^{-1}u = A(y)u + B(y)u$$

isto prova que $SA(y)S^{-1}$ é uma extensão de $A(y) + B(y)$. Além disso, se $\lambda > \omega$ então $\lambda \in \rho(A(y))$ e

$$S[A(y) - \lambda I]S^{-1}u = A(y)u + B(y)u - \lambda u \quad \text{para} \quad u \in H^3(\mathbb{R}).$$

Portanto[2]

$$S[A(y) - \lambda I]S^{-1} = A(y) + B(y) - \lambda I$$

isto é, $SA(y)S^{-1} = A(y) + B(y)$. ∎

---

[2] Sejam A_1 e A_2 dois operadores lineares fechados em X tais que A_1 é uma extensão de A_2, A_1 é injetivo e A_2 é inversível. Então $A_1 = A_2$. [H].

De (1.10) e a proposição 1.7 temos verificada a hipótese A_2.

Hipótese A_3.

Vamos mostrar a seguinte proposição.

Proposição 1.8. Para cada $y \in W$, $\mathcal{D}(A(y)) \supseteq Y, A(y)$ é um operador linear limitado de Y em X, e existe $\mu_1 > 0$ tal que

$$||A(y_1) - A(y_2)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \mu_1 ||y_1 - y_2||_X$$

para todo $y_1, y_2 \in W$.

Prova.

Como $s \geq 3$ temos que $\mathcal{D}(A(y)) = H^3(\mathbb{R}) \supseteq Y$ para cada $y \in W$. Além disso, para $u \in Y$ temos que

$$||A(y)u|| = ||\partial_x^3 u|| + ||a(y)\partial_x u|| \leq ||\partial_x^3 u|| + ||a||_\infty ||\partial_x u|| \leq (1 + ||a||_\infty)||u||_s$$

pois $||\partial_x^3 u||$ e $||\partial_x u||$ não são maiores que $||u||_s$. Logo

$$\text{Sup}\{||A(y)u|| : ||u|| = 1\} \leq 1 + ||a||_\infty$$

e portanto $A(y)$ é um operador linear limitado de Y em X. Agora, se $y_1, y_2 \in W$ então para $u \in Y$

$$A(y_1)u - A(y_2)u \leq (a(y_2) - a(y_1))\partial_x u$$

assim

$$\begin{aligned} ||A(y_1)u - A(y_2)u|| &\leq ||a(y_2) - a(y_1)||||\partial_x u||_{s-1} \\ &\leq \text{Sup}_{x \in W}|\partial_x a(x)| \; ||Y_1 - y_2|| \; ||u||_s. \end{aligned}$$

Portanto

$$||A(y_1) - A(y_2)||_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \text{Sup}_{x \in W}|\partial_x a(x)| \; ||y_1 - y_2||_X$$

e a prova está completa. ∎

Assim temos verificada a hipótese A_3.

Hipótese A_4.

É trivialmente satisfeita pois $W = B_R[0]$ é uma bola centrada na origem.

Hipótese A_5.

Provemos que existe $\mu_3 > 0$ tal que

$$||B(y_1) - B(y_2)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \mu_3 ||y_1 - y_2||_s$$

para cada $y_1, y_2 \in W$.

De fato, é fácil ver que

$$B(y) = [\mathcal{M}_a S - S\mathcal{M}_a]\partial_x S^{-1}$$

onde $a = a(y)$. Então

$$B(y_1) - B(y_2) = [S(\mathcal{M}_{a_2} - \mathcal{M}_{a_1}) - (\mathcal{M}_{a_2} - \mathcal{M}_{a_1})S]\partial_x S^{-1}.$$

Como $\mathcal{M}_{a_2} - \mathcal{M}_{a_1} = \mathcal{M}_{a_2 - a_1}$, temos que

$$B(y_1) - B(y_2) = [S(\mathcal{M}_{a_2 - a_1}) - (\mathcal{M}_{a_2 - a_1})S]\partial_x S^{-1} = B(y_1 - y_2).$$

Portanto

$$||B(y_1) - B(y_2)||_{\mathcal{L}(X)} \leq sC||a(y_1 - y_2)||_s \leq sC'||y_1 - y_2||_s$$

isto completa a prova. ∎

Isto prova a hipótese A_5.

Hipótese f_1 e f_2.

São trivialmente satisfeitas pois $f \equiv 0$.

Tendo verificadas as hipóteses dos teoremas 3.1.2 e 3.2.1, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.9. Para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, onde $s \geq 3$, existe $T_0 \in \mathbb{R}^+$ e uma única função

$$u \in C([0,T_0], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T_0], L^2(\mathbb{R}))$$

tal que u é solução de (G), e u depende continuamente de u_0.

4.2. Comentários.

1. O argumento dado anteriormente mostra que a forma do termo ∂_x^3 em (G) não tem significado especial. Este termo pode ser substituído por $P(D)u$ com qualquer polinômio P, de grau $m \geq 2$, com a seguinte condição: se m é um número par, o sinal do coeficiente do termo principal tem que ser $(-1)^{m/2}$. Neste caso pode-se escolher $Y = H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq m$.

2. Em [K6] Kato prova a existência, unicidade e dependência contínua do dado inicial para a solução local quando $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{3}{2}$ ($s = \infty$ é incluído). Além disso, a solução permanece no mesmo espaço do dado inicial. Para aplicar o teorema 3.1.2, neste caso, fazemos uma transformação preliminar da incógnita por

$$u(t) = T(t)v(t) \tag{2.1}$$

onde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é o C_0-grupo unitário em $H^s(\mathbb{R})$ gerado pelo operador "skew-adjoint" ∂_x^3 em cada $H^s(\mathbb{R})$. Substituindo (2.1) em (G) obtemos a equação de evolução quase linear para v

$$\partial_t v + A(t,v)v = 0,$$

onde $A(t,y) = T(-t)a(T(t)y)\partial_t T(t)$ é um operador linear que depende de t e $y \in H^s(\mathbb{R})$. Ao verificar as hipóteses correspondentes ao teorema 3.1.2, o trabalho é análogo, exceto pela hipótese A_3. Em lugar de A_3, pode-se provar que

$$t \in [0,T] \mapsto A(t,y) \in \mathcal{L}(Y,X)$$

é fortemente contínua, e não contínua na norma de $\mathcal{L}(Y, X)$ como requer A_3.

É importante notar aqui que o resultado de Kobayasi [Ko] para as equações de evolução lineares, mencionado no final da seção 2.1 do capítulo 2, permite mostrar que é suficiente a continuidade forte de

$$t \in [0, T] \mapsto A(t, y) \in \mathcal{L}(Y, X)$$

no caso quase-linear. Assim o teorema 3.1.2 pode ser aplicado.

3. Kato também considera em [K6] o problema de Cauchy para a própria KdV, isto é

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad \text{para} \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0. \end{cases}$$

Prova-se neste artigo que o problema é globalmente bem posto se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq 2$, e a solução permanece no mesmo espaço.

Bibliografia

[BN] G. BACHMAN, L. NARICI. *Functional Analysis.* Academic Press, (1966).

[B] R.G. BARTLE. *The Elements of Integration.* John Wiley, (1966).

[Br] H. BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle.* Paris, (1983).

[BB] P.L. BUTZER, H. BERENS. *Semi-groups of Operators and Approximation.* New York; Springer-Verlag, (1967).

[CP] R. CURTAIN, A. PRITCHARD. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 132, (1977).

[D] J.R. DORROCH. *A Simplified Proof of a Theorem of Kato on Linear Evolution Equations.* J. Math. Soc. of Japan, vol. 27, (1975), 474-478.

[F] G.B. FOLLAND. *Real Analysis, Modern Techniques and Applications.* John Wiley (1984).

[G] J.A. GOLDSTEIN. *Semi-groups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press, (1985).

[H] M. HEARD. *Lectures on Semigroups Theory and Partial Differential Equations.* Chicago, 1993. Em preparação.

[Hi] E. HILLE. *Methods in Classical and Functional Analysis.* Addison-Wesley Publ. Co., (1972).

[HP] E. HILLE, R. PHILLIPS. *Functional Analysis and Semi-groups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, (1957).

[I] R.J. IORIO JR.. *Tópicos na Teoria da Equação de Schrödinger.* 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1987).

[IN] R.J. IORIO JR., W.L.V. NUNES. *Introdução à Equações de Evolução Não Lineares.* 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1991).

[K1] T. KATO. *Integration of the Equation Evolution in Banach Spaces.* J. Math. Soc. Japan, vol. 5, (1953), 208-234.

[K2] T. KATO. *Linear Evolution Equations of "Hiperbolic" Type.* J. Faculty of Science Univ. of Tokyo, vol. 17, (1970), 241-258.

[K3] T. KATO. *Linear Evolution Equations of "Hiperbolic" Type II.* J. Math. Soc. Japan, vol. 25, (1973), 648-666.

[K4] T. KATO. *Quasi-Linear Equations of Evolution, with Aplications to Partial Differential Equations.* Lecture and Notes in Mathematics, vol. 448, (1975), 25-70.

[K5] T. KATO. *Pertubation Theory For Linear Operator.* Springer-Verlarg, (1976).

[K6] T. KATO. *On The Korteweg-de Vries Equations.* Manuscripta Mathematica, vol. 28, (1979).

[K7] T. KATO. *On The Cauchy Problem For The (Generalized) KdV Equations.* Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. 8, (1983), 93-128.

[K8] T. KATO. *Non-Linear Equations of Evolution in Banach Spaces.* Proccedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 45, Part 2, A.M.S., (1986), 9-23.

[K9] T. KATO. *Abstract Evolution Equations, Linear and Quasilinear, Revisited.* Preprint.

[Ko] K. KOBAYASI. *On a Theorem for Linear Evolution Equations of Hiperbolic Type.* J. Math. Soc. Japan, vol. 31, nº 4, (1979), 647-654.

[KS] K. KOBAYASI, N. SANEKATA. *A Method of Iterations for Quasi-Linear Evolution Equations in nonreflexive Banach Spaces.* Hiroshima Math. J., 19, (1989), 521-540.

[KF] A. KOLMOGOROV, S. FOMIN. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Ed. Mir, Moscu (1972).

[Kr] S.G. KREIN. *Linear Differential Equations in Banach Spaces.* Translations Amer. Math. Soc., vol. 29, (1971).

[M] A.C. McBride. *Semigroups of Linear Operators: An Introduction.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 156, (1987).

[P] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, (1983).

[Po] G. Ponce. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución.* Colombia, (1993).

[S1] N. Sanekata. *Convergence of Approximate Solutions to Quasi-Linear Evolution Equations in Banach Spaces.* Proc. Japan Acad., vol. 55, Ser. A, (1979), 245-249.

[S2] N. Sanekata. *Some Remarks on Quasi-Linear Evolution Equations in Banach Spaces.* Tokyo J. Math., vol. 3, nº 2, (1980), 291-302.

[S3] N. Sanekata. *Abstract Quasi-Linear Equations of Evolution in nonreflexive Banach Spaces.* Hiroshima Math. J., 19, (1989), 109-139.